Доклады Академии наук СССР
1974. Том 215, № 4

УДК 518.733.431 *МАТЕМАТИКА*

Академик Н. Н. КРАСОВСКИЙ, Ю. С. ОСИПОВ

К ТЕОРИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ИГР С НЕПОЛНОЙ ИНФОРМАЦИЕЙ

Рассматривается дифференциальная игра сближения в условиях неполной информации. Предлагается подход, позволяющий сформулировать для таких задач аналог принципа экстремального прицеливания ([1, 2]); указываются условия успешного завершения игры сближения и способ построения разрешающих управлений. Работа примыкает к исследованиям ([1–8]).

1. Задана управляемая система

$$\dot{x}=B(t)u-C(t)v+w(t), \quad t_0\leqslant t\leqslant\vartheta; \tag{1}$$

здесь x — n-мерный вектор фазовых координат; r_1-мерный вектор u и r_2-мерный вектор v — управления первого и второго игроков соответственно, стесненные условиями

$$u\in\mathscr{P}, \quad v\in\mathscr{Q}, \tag{2}$$

где $\mathscr{P}$, $\mathscr{Q}$ — компактные множества, матрицы $B(t)$, $C(t)$, $w(t)$ интегрируемы по Лебегу на $[t_0, \vartheta]$.

Заметим, что отсутствие в (1) члена $A(t)x$ не уменьшает общности рассматриваемой линейной системы, так как исключение этого члена в случае интегрируемой по Лебегу матрицы $A(t)$ достигается известным неособым преобразованием координат (см., например, ([3])).

В пространстве $E_n=\{x\}$ задано компактное выпуклое множество $\mathscr{M}$. Цель первого игрока — выбором управления u обеспечить приведение точки $x(t)$ на $\mathscr{M}$ в заданный момент ϑ. Цель второго игрока противоположна.

При формировании управлений игроки располагают следующей информацией. Первый игрок в каждый момент t знает выпуклое компактное множество R_t, содержащее реализованное к этому моменту состояние $x(t)$ системы (1). На основании указанной информации он выбирает в момент t управление $u[t]$. Второй игрок может выбирать любой способ формирования воздействия v, вырабатывающий измеримую по Лебегу на $[t_0, \vartheta]$ реализацию $v[t]$, при почти всех t со значениями в Q, в том числе и способ, использующий информацию о значении управляющего воздействия партнера в тот же момент времени t.

Оговорим характер изменения множеств R_t со временем. Примем, что диаметр R_t оценивается сверху числом $\varphi(t)$, причем функция $\varphi=\varphi(t)$, $t_0\leqslant t\leqslant\vartheta$, не возрастет. Далее будем различать два случая 1°) и 2°). Каковы бы ни были моменты t_*, $t^*\geqslant t_*$, множество R_{t^*} состоит только из таких фазовых состояний, в которые можно перевести управляемую систему к моменту t^* согласно закону (1), начиная движение в момент t_* из R_{t_*}: 1°) под действием реализованных в процессе игры на $[t_*, t^*]$ управлений игроков $u[t]$ и $v[t]$, 2°) под действием реализованного управления $u[t]$ и каких-либо управлений $v[t]$, совокупность которых меняется при изменении состояний $x[t_*]\in R_{t_*}$.

2. Математическая формализация проблемы основывается на взаимно однозначном соответствии между выпуклыми компактами в E_n и их опорными функциями и достигается путем погружения исходной задачи в более общую задачу управления в подходящем функциональном пространст-

ве. Пусть $\mathscr{H}$ — лебегово пространство скалярных функций с интегрируемым на единичном шаре $\mathscr{E}=\{l|\ \|l\|\leqslant 1\}\subset E_n$ квадратом с нормой

$$\|h\|_2=(\langle h, h\rangle)^{1/2}=\left(\int\limits_{\mathscr{E}} h^2(l)\,dl\right)^{1/2}.$$

Пусть $h_0(l)$, $\mu(l)$ — опорные функции R_{t_0} и $\mathscr{M}$; $d(g)=\operatorname{vrai}\max_l(g(l)+g(-l))$ — **диаметр** элемента $g\in\mathscr{H}$; $\mathscr{L}=\{h\in\mathscr{H}|h(l)\leqslant\mu(l)$ п.в. $l\}$, $\mathscr{L}^\varepsilon$ — замкнутая ε-окрестность $\mathscr{L}$ в $\mathscr{H}$. Совокупность элементов $g_t=g_t(l;\ h)$, $t_*\leqslant t\leqslant t^*$, назовем **уточнением элемента** h на $[t_*, t^*]$, если $g_{t_*}(l)\leqslant h(l)$ при почти всех l, $d(g_t)\leqslant\varphi(t)$, $t_*\leqslant t\leqslant t^*$, и для любых $t_*\leqslant t_1<t_2\leqslant t^*$ при почти всех l

$$g_{t_2}(l)\leqslant g_{t_1}(l)+\int\limits_{t_1}^{t_2}(f_\xi(l)_v+lw(\xi))\,d\xi;$$

здесь $f_\xi(l)_v=-lC(\xi)v[\xi]$ в случае 1°) ($v[\xi]$ — реализация v на $[t_*, t^*]$) и $f_\xi(l)_v=-\min lC(\xi)v$, $v\in\mathscr{Q}$, в случае 2°). Пары $p=\{t, h\}$, $t\in[t_0, \vartheta]$, $h\in\mathscr{H}$, называются позициями. **Стратегия** U первого игрока — правило, ставящее в соответствие каждой позиции p множество $\mathscr{U}(p)\subset\mathscr{P}$.

Пусть фиксирована позиция $p_*=\{t_*, h_*\}$, $t_*<\vartheta$, и Δ — конечное разбиение $[t_*, \vartheta]$ точками τ_i, $\tau_0=t_*$, $\tau_i<\tau_j$, $j>i$, $\delta(\Delta)=\max_i(\tau_{i+1}-\tau_i)$. Совокупность элементов $h_t(l)_\Delta=h_t[\cdot,\ p_*,\ U]_\Delta\in\mathscr{H}$, $t_*\leqslant t\leqslant\vartheta$, назовем **аппроксимационным движением** системы (1) из p_*, отвечающим U, если при каждом t

$$h_t(l)_\Delta=g_t(l)+l\int\limits_{t_*}^{t}B(\xi)u[\xi]\,d\xi$$

для почти всех l; здесь $u[t]=u[\tau_i]\in\mathscr{U}(\tau_i,\ h_{\tau_i}(l)_\Delta)$, $\tau_i\leqslant t<\tau_{i+1}$; g_t, $t_*\leqslant t\leqslant\vartheta$,— какое-то уточнение h_* на $[t_*, \vartheta]$. Величина g_t описывает для исходной системы деформацию и сдвиг области, содержащей реализованное к моменту t состояние $x(t)$. Это изменение указанной области определяется обстоятельствами, не подчиненными первому игроку. Подчеркнем, что при этом способ формирования величины g_t может учитывать любую мыслимую информацию о системе и характере управления, избранном первым игроком.

Задача 1. Заданы система (1), позиция $p_0=\{t_0,\ h_0\}$. Требуется построить стратегию U, удовлетворяющую условию: каково бы ни было число $\varepsilon>0$, можно указать число $\delta_0>0$ такое, что для **всякого** движения $h_t(l)_\Delta=h_t[\cdot,\ p_0,\ U]_\Delta$ с $\delta(\Delta)\leqslant\delta_0$ в момент ϑ выполнится включение $h_\vartheta(l)_\Delta\in\mathscr{L}^\varepsilon$.

Заметим следующее. Пусть стратегия U решает задачу 1, т. е. гарантирует попадание всех элементов $h_\vartheta[\cdot,\ p_0,\ U]_\Delta$ в достаточно малую окрестность множества $\mathscr{L}$ в $\mathscr{H}$, в том числе опорные функции областей R_ϑ, реализуемых в процессе игры, также попадут в указанную окрестность. Однако, поскольку эти опорные функции включаются в некоторое компактное множество непрерывных функций, то включение $h_\vartheta\in\mathscr{L}^\varepsilon$ при достаточно малом ε означает, что все области R_ϑ содержатся в достаточно малой эвклидовой окрестности множества $\mathscr{M}$. Таким образом, задачу 1 можно рассматривать как математическую формализацию исходной проблемы управления.

3. Укажем условия разрешимости задачи 1 и способ построения разрушающей стратегии. Пусть $\mathscr{N}_t\subset\mathscr{H}$, $t_0\leqslant t\leqslant\vartheta$,— система непустых множеств и $r(t,\ h)=\inf\|h-y\|_2$, $y\in\mathscr{N}_t$. Пусть $\{y_k\}$ — какая-либо минимизирующая для $r(t,\ h)$ последовательность. Составим последовательность $\{\eta_h^{(k)}\}$ эле-

ментов

$$\eta_h^{(k)}(l) \overset{\text{п.в.}l}{=} \begin{cases} y_k(l)-h(l), & \text{если } y_k(l)<h(l), \\ 0, & \text{если } y_k(l)\geqslant h(l), \end{cases}$$

и образуем совокупность всех слабых в $\mathscr{H}$ пределов ее. Объединение таких совокупностей по всевозможным $\{\eta_h^{(k)}\}$ обозначим символом $\mathscr{D}(h, \mathscr{N}_t)$, $D\neq\emptyset$.

Стратегию U^e, задаваемую множествами

$$\mathscr{U}^e(t,h)=\Big\{u^e|s(t,h)B(t)u^e=\max_{u\in\mathscr{P}} s(t,h)B(t)u,$$

$$s(t,h)=\int\limits_{\mathscr{G}} lg(l)\,dl,\quad g\in\mathscr{D}(h,\mathscr{N}_t)\Big\}$$

назовем экстремальной к системе множеств $\mathscr{N}_t$, $t_0\leqslant t\leqslant\vartheta$.

Скажем, что система множеств $\mathscr{N}_t$, $t_0\leqslant t\leqslant\vartheta$, сильно u-стабильна, если, каковы бы ни были позиция $p_*=\{t_*, h_*\}$, где $t_*<\vartheta$, $h_*\in N_{t_*}$, момент $t^*>t_*$, уточнение g_t, $t_*\leqslant t\leqslant t^*$, элемента h_*, существует программа $u(t)$, $t_*\leqslant t\leqslant t^*$ (т. е. измеримая по Лебегу функция при почти всех t со значениями в $\mathscr{P}$), такая, что

$$g_{t^*}(l)+l\int\limits_{t_*}^{t^*}B(\xi)u(\xi)\,d\xi\in\mathscr{N}_{t^*}.$$

Роль экстремальной стратегии определяет важная

Лемма 1. *Пусть система множеств $\mathscr{N}_t\subset\mathscr{H}$, $t_0\leqslant t\leqslant\vartheta$, сильно u-стабильна. Экстремальная к ней стратегия U^e обладает свойством: каково бы ни было $\varepsilon>0$, можно указать числа δ_0 и α такие, что для всех движений $h_t(l)_\Delta=h_t[\cdot, p_*, U^e]_\Delta$, $t_0\leqslant t\leqslant\vartheta$, с $\delta(\Delta)\leqslant\delta_0$ выполняется неравенство $r(t, h_t(l)_\Delta)<\varepsilon$, $t_0\leqslant t\leqslant\vartheta$, если только позиция $p_*=\{t_0, h_*\}$ удовлетворяет условию $r(t_0, h_*)\leqslant\alpha$.*

В связи с задачей 1 и леммой 1 возникает вопрос о построении системы $\mathscr{N}_t$, $t_0\leqslant t\leqslant\vartheta$, сильно u-стабильных множеств, обладающей свойством $\mathscr{U}_\vartheta\subset\mathscr{L}$. Обсудим этот вопрос. Пусть $\mathscr{K}_{t_*}$ — совокупность всех $h\in\mathscr{H}$ со свойством: каково бы ни было уточнение g_t, $t_*\leqslant t\leqslant\vartheta$, элемента h, существует программа $u(t)$, $t_*\leqslant t\leqslant\vartheta$, такая, что

$$g_\vartheta(l)+l\int\limits_{t_*}^{\vartheta}B(\xi)u(\xi)\,d\xi\in\mathscr{L}. \tag{3}$$

По аналогии с ([1]) условие (3) назовем условием программного поглощения цели $\mathscr{M}$ из позиции $\{t_*, h\}$, а само $\mathscr{K}_{t_*}$ — множеством программного поглощения (в момент ϑ).

Обозначим

$$\mathscr{H}_-=\{h\in\mathscr{H}\,|\,h(l)\leqslant 0 \text{ п.в. } l\},$$

$$S_1=\{h\in\mathscr{H}_-|\ \ \|h\|_2=1\},\ S_2=\{h\in\mathscr{H}_-|\ \ \|h\|_2\leqslant 1\},$$

$$\psi(\eta,h,t,\vartheta)=\langle\eta,\mu\rangle-\chi(\eta,h,t,\vartheta),\qquad \chi(\eta,h,t,\vartheta)=\rho_u(\eta,t,\vartheta)+\inf_{g=g_\vartheta(l;\,h)}\langle\eta,g\rangle,$$

где inf вычисляется по всевозможным уточнениям h на $[t,\vartheta]$ и

$$\rho_u(\eta,t,\vartheta)=\int\limits_t^\vartheta\Big[\max_{u\in\mathscr{P}}\Big(\int\limits_{\mathscr{G}} l\eta(l)\,dl\Big)B(\xi)u\Big]\,d\xi.$$

Заметим, что в случае 1°)

$$\inf_g\langle\eta,g\rangle=\inf_{q\in J(\vartheta,h)}\langle\eta,q\rangle-\rho_v(\eta,t,\vartheta),$$

где

$$J(\vartheta, h)=\{q\in\mathscr{H}\,|\,q(l)\leqslant h(l) \text{ п.в. } l,\ d(q)\leqslant\varphi(\vartheta)\},$$

$$\rho_v(\eta, t, \vartheta) = \int\limits_t^{\vartheta}\Big[\max_{v\in Q}\Big(\int\limits_{\xi} l\eta(l)\,dl\Big) C(\xi)v\Big]\,d\xi.$$

Справедлива

Лемма 2. *$h\in\mathscr{K}_t$ тогда и только тогда, когда*

$$\gamma(t,h)=\sup\varphi(\eta,h,t,\vartheta)\leqslant 0. \qquad (4)$$

Доказательство леммы 2 опирается на теорему об отделимости выпуклых множеств и строится по тому же плану, что и доказательство аналогичных утверждений в ([1], [5]).

Рассмотрим следующие условия, отвечающие здесь известным условиям регулярности из теории позиционных дифференциальных игр с полной информацией ([1], [2], [5], [7], [8]).

Условие A_1. При любых $t\in[t_0, \vartheta)$, $h\notin\mathscr{K}_t$ верхняя грань в (4) достигается на единственном элементе S_1.

Условие A_2. При любых $t\in[t_0, \vartheta)$, $h\notin\mathscr{K}_t$ функционал $\chi(\eta, h, t, \vartheta)$ является выпуклым по $\eta\in S_2$.

Справедлива импликация $A_2\Rightarrow A_1$.

Доказательство этого утверждения основывается на свойствах функционала φ из (4), выпуклости и слабой замкнутости в $\mathscr{H}$ множества S_2.

Лемма 3. *Пусть $\mathscr{K}_{t_0}\neq\phi$ и выполняется какое-нибудь из условий A_i. Тогда при любом t имеем $\mathscr{K}_t\neq\phi$, и система множеств $\mathscr{K}_t$, $t_0\leqslant t\leqslant\vartheta$, сильно u-стабильна.*

Из лемм 1, 3 вытекает

Теорема. *Пусть начальная позиция $p_0=\{t_0, h_0\}$ такова, что $\gamma(t_0, h_0)\leqslant 0$, и выполняется одно из условий A_i. Тогда стратегия U^e, экстремальная к системе множеств $\mathscr{K}_t$, $t_0\leqslant t\leqslant\vartheta$, разрешает задачу* 1.

Примечание. Пусть уточнение множеств R_t не происходит. Тогда достаточным условием для выполнения условий A_i является, например, условие: при любом $t\in[t_0, \vartheta)$ функция

$$\int\limits_t^{\vartheta}[\max_{u\in\mathscr{P}} lB(\xi)u - \max_{v\in Q} lC(\xi)v]\,d\xi$$

является выпуклой по l. Множества $\mathscr{K}_t$ являются теперь выпуклыми и слабо замкнутыми в $\mathscr{H}$, и движения системы формализуются в рамках интегральных уравнений в контингенциях. Заметим также, что в данном случае по аналогии с ([5], [8]) можно указать необходимые и достаточные условия стабильности множеств $\mathscr{K}_t$, $t_0\leqslant t\leqslant\vartheta$.

Институт математики и механики
Уральского научного центра Академии наук СССР
Свердловск

Поступило
19 XII 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *Н. Н. Красовский*, Техническая кибернетика, № 2, 3 (1973). [2] *Н. Н. Красовский*, Игровые задачи о встрече движений, «Наука», 1970. [3] *Н. Н. Красовский, Ю. С. Осипов*, Механика твердого тела, № 4 (1973). [4] *Ю. С. Осипов*, ПММ, т. 35, № 1 (1971). [5] *Н. Н. Красовский, Ю. С. Осипов*, ДАН, т. 197, № 4 (1971). [6] *А. А. Меликян, Ф. Л. Черноусько*, ПММ, т. 35, № 6 (1971). [7] *Н. Н. Красовский*, ПММ, т. 35, № 2 (1970). [8] *Ю. С. Осипов*, Об условиях стабильности поглощения в дифференциально-разностных играх, I, Управляемые системы, в. 8, 1971. [9] *Х. Н. Боненбласт, С. Карлин*, Сборн. Бесконечные антагонистические игры, 1963.