Доклады Академии наук СССР
1974. Том 215, № 4

УДК 517.95 **МАТЕМАТИКА**

Э. М. СААК

АПРИОРНАЯ ОЦЕНКА В L_p ДЛЯ ЗАДАЧИ С НАКЛОННОЙ ПРОИЗВОДНОЙ

(Представлено академиком И. Н. Векуа 15 VIII 1973)

Задаче с наклонной производной посвящено большое количество работ, библиографию которых можно найти в монографиях ([1], [2]) (см. также ([3], [4])). Однако вопрос о необходимом и достаточном условии справедливости априорной оценки в L_p для невырожденной задачи с наклонной производной не затрагивался. В данной работе этот вопрос полностью решается.

Введем необходимые обозначения и определения. Семейство $\{X_p\}$ банаховых пространств будем называть совершенной шкалой с центром X_{p_0}, если:

1) $X_{p_1}\subset X_{p_2}$ при $p_1>p_2$, причем вложение непрерывное и плотное;
2) X_{p_0} — гильбертово пространство;
3) для любого индекса $p>p_0$ существует индекс $q<p_0$ такой, что сопряженное к пространству X_p пространство $X_p{}^*$ изоморфно X_q относительно скалярного произведения (x, y) в X_{p_0} и справедливо неравенство $(x, y)\leqslant M\|x\|_p\|y\|_q$ для любых $x, y\in X_{p_0}$, где M не зависит от x и y;
4) все X_p — рефлексивные пространства.

Если Ω — область в R^n, то через $W_p^{(r)}(\Omega)$ обозначается пространство С. Л. Соболева, через $\overset{\Delta}{W}{}_p^{(r)}(\Omega)$ обозначается подпространство $W_p^{(r)}(\Omega)$, состоящее из гармонических в области Ω функций. Нормировку пространства $W_2^{(1)}(\Omega)$ выбираем такой, чтобы решение задачи Дирихле в области Ω совпадало с проекцией функции $f\in W_2^{(1)}(\Omega)$ на подпространство $\overset{\Delta}{W}{}_2^{(1)}(\Omega)$. Такая нормировка существует ([5]).

Через $g_\Omega(x, y)$ обозначается регулярная часть функции Грина для оператора Лапласа и области Ω.

Лемма 1. *Для того чтобы семейство $\{\overset{\Delta}{W}{}_p^{(1)}(\Omega)\}$, $1<p\leqslant p'$, $2\leqslant p'<\infty$, было совершенной шкалой (с центром $\overset{\Delta}{W}{}_2^{(1)}(\Omega)$), необходимо и достаточно, чтобы*

$$g_\Omega(x, y)\in W_{p'}^{(1)}(\Omega) \tag{1}$$

как функция от y при каждом фиксированном $x\in\Omega$.

В несколько иной форме это предложение имеется в работе автора ([6]).

Сформулируем аналогичное утверждение.

Лемма 2. *Для того чтобы семейство $\{\overset{\Delta}{W}{}_2^{(r)}(\Omega)\}$, $-r'\leqslant r\leqslant r'$, $1\leqslant r'<\infty$, было совершенной шкалой с центром $\overset{\Delta}{W}{}_2^{(1)}(\Omega)$, необходимо и достаточно, чтобы*

$$g_\Omega(x, y)\in W_2^{(r')}(\Omega) \tag{2}$$

как функция от y при каждом $x\in\Omega$.

Лемма 3. *Если $\{X_p\}$ — совершенная шкала, а $\{Y_p\}$ — совершенная субшкала*, то ортогональный проектор пространства X_{p_0} на Y_{p_0} непрерывно отображает пространство X_p на Y_p.*

Аналогичное предложение в неявной форме использовалось в работе автора (7).

Используя леммы 1—3, получаем следующие утверждения.

Теорема 1. *Для того чтобы решение задачи Дирихле в области Ω было оператором, непрерывно отображающим пространство $W_p^{(1)}(\Omega)$ $(W_2^{(r)}(\Omega))$ на подпространство $\overset{\Delta}{W}{}_p^{(1)}(\Omega)$ (соответственно на $\overset{\Delta}{W}{}_2^{(r)}(\Omega)$), необходимо и достаточно выполнения условия (1) (соответственно (2)).*

Теорема 2. *Для того чтобы решение задачи Неймана в области Ω было оператором, непрерывно отображающим пространство $[W_q^{(1)}(\Omega)]^*$ $([W_2^{(-r)}(\Omega)]^*)$ на пространство $\overset{\Delta}{W}{}_p^{(1)}(\Omega)$, $1/p+1/q=1$, $1<q\leqslant 2$ (соответственно на $\overset{\Delta}{W}{}_2^{(r)}(\Omega)$) необходимо и достаточно выполнения условия (1) (соответственно (2)).*

Эти теоремы, очевидно, эквивалентны априорным оценкам в L_p для соответствующих задач.

Пусть $\alpha(x)$ — непрерывная в R^n положительная матрица: $\alpha x\cdot x>0$ $\forall x\in R^n$, $x\neq 0$. Положим

$$\langle u, v\rangle_\Omega^{(\alpha)}=\int_\Omega \alpha\nabla u\cdot\nabla v\,dx, \tag{3}$$

где ∇ означает градиент. Обозначим через $L_p^{(1)}(\Omega)$ пространство классов дифференцируемых по С. Л. Соболеву функций $u(x)$, $x\in\Omega$, с нормой

$$\|u\|_{1,p}=\left\{\int_\Omega |\nabla u|^p\,dx\right\}^{1/p}.$$

К одному классу относятся функции, отличающиеся аддитивной постоянной. Оператор $\tilde{A}$ определим соотношением

$$\langle \tilde{A}u, v\rangle_\Omega^{(1)}=\langle u, v\rangle_\Omega^{(\alpha)}, \tag{4}$$

где 1 означает единичную матрицу, $u\in L_2^{(1)}(\Omega)$ — фиксированный, $v\in L_2^{(1)}(\Omega)$ — произвольный элементы, $\tilde{A}u\in L_2^{(1)}(\Omega)$. Поскольку $\alpha=\beta^*\beta$, где β^* — транспонированная к матрице β матрица, то билинейный функционал (3) симметричен и его можно принять за эквивалентное скалярное произведение в $L_2^{(1)}(\Omega)$. Поэтому оператор $\tilde{A}$ осуществляет автоморфизм пространства $L_2^{(1)}(\Omega)$.

Положим

$$Au\equiv\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right),$$

где a_{ij} — элементы матрицы α. Обозначим через $\overset{A}{L}{}_p^{(1)}(\Omega)$ подпространство классов функций из $L_p^{(1)}(\Omega)$, удовлетворяющих уравнению $Au(x)=0$, $x\in\Omega$, в смысле теории обобщенных функций. В частности $\overset{\Delta}{L}{}_p^{(1)}(\Omega)$ — подпространство гармонических в Ω классов функций.

---

* Т. е. совершенная шкала подпространств $(Y_p\subset X_p)$ с центром $Y_{p_0}\subset X_{p_0}$.

Оператор $P^{(\alpha)}$ определим соотношением

$$\langle u, v\rangle_\Omega^{(\alpha)} = \langle P^{(\alpha)} u, v\rangle_\Omega^{(\alpha)}, \tag{5}$$

где $u \in L_2^{(1)}(\Omega)$ — фиксированный, $v \in \overset{A}{L}{}_2^{(1)}(\Omega)$ — произвольный элемент, $P^{(\alpha)} u \in \overset{A}{L}{}_2^{(1)}(\Omega)$.

Лемма 4. *Если имеет место* (1), *то оператор* $\tilde{A} P^{(\alpha)}$ *осуществляет автоморфизм пространства* $\overset{\Delta}{L}{}_p^{(1)}(\Omega)$, $1 < p \leqslant p'$.

Доказательство. Подпространство $\overset{A}{L}{}_2^{(1)}(\Omega)$ служит ортогональным относительно скалярного произведения (3) дополнением к подпространству $\mathring{L}_2^{(1)}(\Omega)$, являющемуся замыканием множества финитных в Ω (т. е. постоянных в окрестности $\partial\Omega$) классов функций. Поэтому из (4) вытекает, что $\tilde{A}$ отображает пространство $\overset{A}{L}{}_2^{(1)}(\Omega)$ на $\overset{\Delta}{L}{}_2^{(1)}(\Omega)$. Итак, при $p=2$ лемма 4 верна. Пусть теперь $p>2$. Тогда функционал (над v) в левой части (4) непрерывен над пространством $\overset{\Delta}{L}{}_q^{(1)}(\Omega)$, $1/p+1/q=1$, и по теореме 2 с учетом (4) имеем $\tilde{A} P^{(\alpha)} u \in \overset{\Delta}{L}{}_p^{(1)}(\Omega)$, если $u \in \overset{\Delta}{L}{}_p^{(1)}(\Omega)$, причем отображение $\tilde{A} P^{(\alpha)}$ непрерывно в $\overset{\Delta}{L}{}_p^{(1)}(\Omega)$. Оператор $\tilde{A} P^{(\alpha)}$ самосопряжен в $\overset{\Delta}{L}{}_2^{(1)}(\Omega)$ и, как нетрудно показать, продолжим по непрерывности в $\overset{\Delta}{L}{}_q^{(1)}(\Omega)$, $1<q<2$. Поэтому, если бы образ $\overset{\Delta}{L}{}_p^{(1)}(\Omega)$ при отображении $\tilde{A} P^{(\alpha)}$ не совпадал с $\overset{\Delta}{L}{}_p^{(1)}(\Omega)$, то в $\overset{\Delta}{L}{}_q^{(1)}(\Omega)$ существовал бы отличный от нуля элемент u_0 такой, что $\tilde{A} P^{(\alpha)} u_0 = 0$. В силу (4), (5) этот элемент должен был бы принадлежать пространству $\mathring{L}_q^{(1)}(\Omega)$ (определенному аналогично $\mathring{L}_2^{(1)}(\Omega)$). Но тогда мы имели бы

$$\langle u_0, v\rangle_\Omega^{(1)} = 0 \qquad \forall v \in \overset{\Delta}{L}{}_p^{(1)}(\Omega)$$

и $u_0 \neq 0$, что противоречит лемме 1. Этим лемма 4 доказана.

Лемма 5. *Если выполнено условие* (1), *то любой линейный функционал* φ *над пространством* $\overset{\Delta}{L}{}_q^{(1)}(\Omega)$, $q' \leqslant q \leqslant 2$, $1/p'+1/q'=1$, *можно записать в виде*

$$\varphi(v) = \langle P^{(\alpha)} u^{(l,\varphi)}, v\rangle_\Omega^{(\alpha)}, \tag{6}$$

где v — *произвольный элемент из пространства* $\overset{\Delta}{L}{}_q^{(1)}(\Omega)$, *а* $u^{(l,\varphi)} \in \overset{\Delta}{L}{}_p^{(1)}(\Omega)$, $1/p+1/q=1$, — *элемент, единственным образом определяемый функционалом* φ.

Доказательство. Согласно теореме 2 имеем $\varphi(v) = \langle u, v\rangle_\Omega^{(1)}$, $u \in \overset{\Delta}{L}{}_p^{(1)}(\Omega)$ — решение задачи Неймана. Поэтому лемма 5 следует из леммы 4.

Лемма 6. *Справедливо тождество*

$$\langle P^{(\alpha)} u, v\rangle_\Omega^{(\alpha)} = \langle u, v\rangle_\Omega^{(\alpha)} + \int_\Omega v A u\, dx \qquad \forall u, v \in L_2^{(1)}(\Omega). \tag{7}$$

Доказательство. Имеем $(P^{(\alpha)}u-u)\in\overset{\circ}{L}{}_2^{(1)}(\Omega)$. Перенося первое слагаемое в правой части (7) налево и интегрируя по частям, получим величину $\int\limits_\Omega uAv\,dx$. Меняя ролями u и v и пользуясь симметрией оператора $P^{(\alpha)}$ относительно скалярного произведения (3), получим (7).

Пусть $\varphi(v)$ — линейный функционал над пространством $\overset{\Delta}{L}{}_2^{(1)}(\Omega)$. Решением задачи с наклонной производной в достаточно гладкой области Ω

$$\Delta u(x)=0,\quad x\in\Omega,\quad \frac{\partial u(x)}{\partial l}=\tilde\varphi(x),\quad x\in\partial\Omega,\quad l=\alpha\nu,$$

назовем элемент $u=u^{(l,\varphi)}\in\overset{\Delta}{L}{}_2^{(1)}(\Omega)$, удовлетворяющий соотношению (6), где функционал φ определяется граничным условием

$$\varphi(v)=\int\limits_{\partial\Omega}v(x)\tilde\varphi(x)\,d\sigma; \tag{8}$$

здесь $d\sigma$ — элемент границы $\partial\Omega$, ν — нормальный к $\partial\Omega$ вектор, $\partial/\partial l=\alpha\nu\cdot\nabla$. Основанием для такого определения служит вытекающее из (6)—(8) соотношение

$$\int\limits_{\partial\Omega}v(x)\frac{\partial u^{(l,\varphi)}}{\partial l}d\sigma=\int\limits_{\partial\Omega}v(x)\tilde\varphi(x)\,d\sigma.$$

В случае произвольной области будем игнорировать конкретное устройство (8) функционала φ и будем называть решением задачи с наклонной производной просто оператор, переводящий φ в $u^{(l,\varphi)}$. Ввиду сказанного выше, это определение согласуется с классическим. Определим пространство $L_p^{(r)}(\Omega)$ по аналогии с $W_p^{(r)}(\Omega)$ и будем говорить, что задача с наклонной производной разрешима в классе $L_p^{(r)}(\Omega)$, $2\leqslant p<\infty$, $r=1, 2, \ldots$, если из ограниченности в $L_q^{(-r)}(\Omega)$, $1/p+1/q=1$, функционала φ следует принадлежность $u^{(l,\varphi)}$ к $L_p^{(r)}(\Omega)$ и (априорная) оценка

$$\|u^{(l,\varphi)}\|_{r,p}\leqslant M\|\varphi\|^{(r,p)},$$

где M не зависит от φ, а $\|\varphi\|^{(r,p)}$ есть норма функционала φ над $L_q^{(-r)}(\Omega)$.

Теорема 3. *Если выполняется условие* (1), *то задача с наклонной производной разрешима в классе* $L_p^{(1)}(\Omega)$, $2\leqslant p\leqslant p'$.

Доказательство. Это следует из лемм 5 и 4.

Аналогичная теорема верна и для пространства $L_2^{(r)}(\Omega)$ (при условии (2)).

Отметим также следующие утверждения, дающие достаточное условие справедливости априорных оценок.

Теорема 4. *Если* $\Omega\in C^{(1)}$, *то выполняется условие* (1) *при любом* p, $1<p<\infty$.

Теорема 5. *Если* $\Omega\in C^{(r')}$, *то выполняется условие* (2).

Таганрогский радиотехнический
институт

Поступило
11 VII 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *И. Н. Векуа,* Обобщенные аналитические функции, М., 1959. [2] *А. В. Бицадзе,* Краевые задачи для эллиптических уравнений 2-го порядка, «Наука», 1966. [3] *А. В. Бицадзе,* Тр. симпозиума, посвященного 60-летию академика С. Л. Соболева, «Наука», 1970, стр. 64. [4] *В. Г. Мазья,* Матем. сборн., т. 87 (129), 3, 417 (1972). [5] *Э. М. Саак,* ДАН, т. 195, № 3, 564 (1970). [6] *Э. М. Саак,* ДАН, т. 211, № 1 (1973). [7] *Э. М. Саак,* ДАН, т. 211, № 5 (1973).