

Л. Д. МДЗИНАРИШВИЛИ

О ЗАКОНЕ ДВОЙСТВЕННОСТИ КОЛМОГОВОРА

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 24 XII 1973)

В работах (1-4) задача изучения связи, существующей между гомологическими свойствами замкнутого множества A , лежащего в локально-компактном пространстве X , и его дополнения $B=X\setminus A$, решается законом двойственности Колмогорова. Во всех указанных выше работах рассматриваемые группы гомологии берутся над компактной группой коэффициентов, а группы когомологии — над дискретной. В работе (5) Е. Г. Складченко для введенных им канонических групп гомологий доказал изоморфизм $H_n(B, G) \approx H_n(X, A, G)$ в случае, когда G — модуль над некоторым кольцом с единицей, но при условии, что X — метризуемое пространство.

В данной работе мы рассматриваем группы гомологии Колмогорова $H_n(X, G)$ над дискретной группой коэффициентов (6, 7) и для них доказываем закон двойственности Колмогорова, причем без условия метризуемости.

Пусть X — локально-компактное, паракомпактное хаусдорфово пространство, G — дискретная группа, а $S=\{D_\alpha\}$ — система всех регулярных локально-конечных разбиений, т. е. система таких локально-конечных разбиений, у которых все элементы имеют компактное замыкание. Так как для каждого $D_\alpha \in S$ его нерв X_α является локально-конечным комплексом, а симплициальное отображение $\pi_{\beta\alpha}: X_\beta \rightarrow X_\alpha$, определенное вписанностью $D_\beta \supset D_\alpha$, является локально-конечным, то однозначный симплициальный спектр $\{X_\alpha, \pi_{\beta\alpha}\}$ порождает однозначный обратный спектр $\{C_n^{\text{inf}}(X_\alpha, G), \pi_{\beta\alpha}^*\}$ групп бесконечных цепей. Предельную группу этого спектра обозначим через $C_n(X, S, G)$. Граничный оператор $\partial: C_n(X, S, G) \rightarrow C_{n-1}(X, S, G)$ индуцируется граничными операторами $\partial_\alpha: C_n(X_\alpha, G) \rightarrow C_{n-1}(X_\alpha, G)$. Группу гомологии цепного комплекса $C_*(X, S, G)$ обозначим через $H_n(X, S, G)$ и назовем группой Чогошвили второго рода.

Теорема 1. *Для локально-компактного, паракомпактного хаусдорфова пространства X группа цепей Колмогорова $F_n(X, G)$ изоморфна группе цепей $C_n(X, S, G)$ как над компактной, так и над дискретной группой коэффициентов, причем этот изоморфизм перестановочен с граничным оператором.*

Следствие 1. *Имеет место изоморфизм*

$$H_n(X, G) \approx H_n(X, S, G).$$

Если для каждого $D_\alpha \in S$ определим целочисленную группу конечных коцепей $C_f^n(X_\alpha)$ нерва X_α , то получим прямой спектр $\{C_f^n(X_\alpha), \pi_{\beta\alpha}^*\}$, предельную группу которого обозначим через $C^n(X, S)$, а группу когомологии — $H^n(X, S)$.

Лемма. *В условиях теоремы 1 имеет место изоморфизм*

$$C_n(X, S, G) \approx \text{Hom}(C^n(X, S), G).$$

Из леммы и теоремы 1 следует, что

$$F_n(X, G) \approx \text{Hom}(C^n(X, S), G).$$

Теорема 2. Пусть задан прямой спектр $\{M_\alpha, p_{\alpha\beta}\}$ свободных групп M_α , удовлетворяющий следующим условиям:

- 1) В каждой группе M_α выделен базис $B_\alpha = \{g_1^\alpha, g_2^\alpha, \dots, g_{\tau(\alpha)}^\alpha, \dots\}$.
- 2) Для каждой пары $\alpha < \beta$, $\alpha, \beta \in I$, множество индексов $\{1, 2, \dots, \tau(\beta), \dots\}$ элементов базиса B_β разбивается на непересекающиеся конечные подмножества $I_1^{\alpha\beta}, I_2^{\alpha\beta}, \dots, I_{\tau(\alpha)}^{\alpha\beta}, \dots$ таким образом, что

$$p_{\alpha\beta}(g_i^\alpha) = \begin{cases} \sum_{j \in I_i^{\alpha\beta}} g_j^\beta, & \text{если } I_i^{\alpha\beta} \neq \emptyset, \\ 0, & \text{если } I_i^{\alpha\beta} = \emptyset, \end{cases}$$

для $i=1, 2, \dots, \tau(\alpha), \dots$

Тогда предел прямого спектра $\{M_\alpha, p_{\alpha\beta}\}$ является свободной группой.

Эта теорема является обобщением теоремы 3, доказанной в работе (8), для случая, когда B_α — конечные базисы.

Следствие 2. Так как прямой спектр $\{C_i^n(X_\alpha), \pi_{\alpha\beta}^*\}$ удовлетворяет условиям теоремы 2, то группа $C^n(X, S)$ является свободной.

Локально-конечное открытое покрытие пространства X назовем регулярным, если замыкание каждого его элемента является компактным подмножеством (9).

Рассмотрим систему $\{O_\alpha\}$ регулярных локально-конечных открытых покрытий. Нерв N_α каждого O_α и симплициальное отображение $\rho_{\beta\alpha}: N_\beta \rightarrow N_\alpha$, порожденное вписанностью $O_\beta \supset O_\alpha$, являются локально-конечными.

Когомологическую группу пространства X над дискретной группой коэффициентов G , порожденную прямым спектром соответствующих когомологических групп конечных коциклов нервов всех локально-конечных регулярных покрытий пространства X , обозначим через $\delta^n(X, G)$ и назовем группой Кудрявцева (9).

Теорема 3. Для локально-компактного, паракомпактного хаусдорфова пространства X имеет место изоморфизм

$$H^n(X, S, G) \approx \delta^n(X, G).$$

Обозначим через $H_\Delta^n(X, G)$ группу когомологий, определенную на системе всех конечных открытых покрытий, в которых все элементы, за исключением быть может одного, являются ограниченными (т. е. имеют компактное замыкание) (10).

Как известно (10), в случае локально-компактного пространства X имеют место следующие изоморфизмы:

$$H_\Delta^n(X, G) \approx \overset{\Delta}{H}^n(X, G) \approx \overset{v}{H}^n(\dot{X}, *; G),$$

где $\overset{\Delta}{H}^n(X, G)$ — группа когомологии Александрова с особыми подкомплексами (2), а $\overset{v}{H}^n(\dot{X}, *; G)$ — группа Александрова — Чеха пары $(\dot{X}, *)$ (\dot{X} — одноточечная компактификация пространства X).

Теорема 4. Для локально-компактного, паракомпактного хаусдорфова пространства X имеет место изоморфизм

$$H_\Delta^n(X, G) \approx \delta^n(X, G).$$

Эта теорема является обобщением теоремы 1 из (9), так как снимается требование второй аксиомы счетности.

Опираясь на теоремы 1—4 и лемму, а также на теорему 4.1 из (11), гл. 3, получаем следующее утверждение.

Теорема 5. Для групп гомологии Колмогорова $\overset{\kappa}{H}_n(X, G)$ локально-компактного, паракомпактного хаусдорфова пространства X над дискретной группой коэффициентов G имеет место формула универсальных коэф-

фициентов (распадающаяся в прямую сумму)

$$0 \rightarrow \text{Ext}(H^{n+1}(\dot{X}, *), G) \rightarrow H_n(X, G) \rightarrow \text{Hom}(H^n(\dot{X}, *), G) \rightarrow 0.$$

Следствие 3. Для локально-компактного паракомпактного хаусдорфова пространства X и пары $(\dot{X}, *)$ группы гомологии Колмогорова над дискретной группой коэффициентов изоморфны между собой, т. е.

$$H_n(X, G) \approx H_n(\dot{X}, *; G).$$

Теорема 6. Теория гомологии Колмогорова на категории компактных пар относительно инварианта.

Используя точность теории гомологии Колмогорова, а также теорему 6 и следствие 3, мы получаем следующее утверждение.

Теорема 7 (двойственность Колмогорова). Пусть (X, A) — компактная пара такая, что $X \setminus A$ — паракомпактное подпространство.

Тогда при условии ацикличности пространства X в размерностях $n, n+1$ для групп гомологии Колмогорова как над компактной, так и над дискретной группой коэффициентов имеет место изоморфизм

$$H(A, G) \approx H_{n+1}(X \setminus A, G).$$

Замечание. Теорему двойственности Колмогорова можно обобщить на случай локально-компактной, паракомпактной пары (X, A) , используя теорему 7 и точность.

Пусть на категории компактных метрических пар задана некоторая точная гомологическая теория, удовлетворяющая аксиомам Милнора⁽⁶⁾. Пусть X — локально-компактное, метрическое пространство. Тогда группу гомологии $H_q^0(X)$ этого пространства можно определить как группу гомологии пары $H_q(\dot{X}, *)$. Обозначим через $C_q^{\text{inf}}(K, G)$ группу бесконечных цепей локально-конечного комплекса K , а через $|K|$ — пространство этого комплекса. В работе⁽¹²⁾ доказано следующее утверждение.

Теорема. Если K — счетный, локально-конечный CW -комплекс, тогда группа гомологии $H_q^0(|K|)$ изоморфна группе гомологии цепного комплекса $C_*^{\text{inf}}(K, G)$.

Это утверждение справедливо и для пары (K, L) .

С л е д с т в и е 4. Пусть A — компактное подмножество сферы S^{n+1} . Обозначим через $H_q^{st}(A, G)$ группу гомологии Стиррода пространства A , а $H_q(C_*^{\text{inf}}(K, G))$ — группу гомологии бесконечных цепей триангуляции K пространства $S^{n+1} \setminus A$. Используя приведенную выше теорему Милнора, а также теорему 7 нашей работы и теорему 7 из⁽⁶⁾, мы получаем закон двойственности Стиррода

$$H_q^{st}(A, G) \approx H_q^k(A, G) \approx H_{q+1}^k(S^{n+1} \setminus A, G) - H_{q+1}(C_*^{\text{inf}}(K, G))$$

для $0 < q < n$.

Тбилисский математический институт
им. А. М. Размадзе
Академии наук ГрузССР

Поступило
2 XI 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ А. Н. Колмогоров, С. Р., в. 202, 1325 (1936). ² П. С. Александров, Уч. зап. Московск. унив., в. 45, Математика (1940). ³ Г. С. Чогошвили, Тр. Тбилисск. матем. инст., т. 18 (1951). ⁴ М. Ф. Бокштейн, Уч. зап. Московск. унив., т. 3, в. 146 (1950). ⁵ Е. Г. Скляренко, УМН, т. 24, № 5 (1969). ⁶ Л. Д. Мдзинаршвили, ДАН, т. 203, № 3 (1972). ⁷ М. Б. Балавадзе, Тр. Тбилисск. матем. инст., т. 41 (1972). ⁸ L. Kaup, M. Keane, Manuscr. math., v. 1, № 1 (1969). ⁹ Л. Д. Кудрявцев, Сообщ. АН ГрузССР, т. 36, 3 (1964). ¹⁰ Н. Стиррод, С. Эйленберг, Основания алгебраической топологии, ИЛ, 1958. ¹¹ С. Маклейн, Гомология, М., 1966. ¹² J. Milnor, On the Steenrod Homology Theory, Preprint, Princeton, 1959.