Доклады Академии наук СССР
1973. Том 212, № 3

МАТЕМАТИКА

Б. С. МИТЯГИН, Е. М. НИКИШИН

О РАСХОДИМОСТИ СПЕКТРАЛЬНЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ В СРЕДНЕМ И ПОЧТИ ВСЮДУ

(Представлено академиком С. М. Никольским 29 I 1973)

В настоящей заметке в дополнение к ([1-3]) доказана расходимость спектральных разложений (в частности кратных рядов Фурье при шаровом суммировании) некоторых функций из L^p в другом L^r, кроме случая $p\geqslant 2\geqslant r$, исключаемого теоремой Рисса — Фишера. В уточнении результата ([2]) о существовании в $L^p(T^N)$, $p<2$, $N\geqslant 2$, функции с расходящимся почти всюду рядом Фурье даны оценки снизу частичных шаровых сумм таких рядов.

1. Пусть $A(s)$ — эллиптический многочлен N переменных, и A — некоторое полуограниченное самосопряженное расширение оператора $A_{\min}=$ $=A\left(i\dfrac{\partial}{\partial x}\right)\Big|C_0^\infty(G)$, где G — открытое множество в R^N; обозначим через E_λ спектральное разложение единицы для A. Через $\mathscr{E}_0'\cap L^p(G)$ будем обозначать пространство функций f из $L^p(G)$, $1\leqslant p\leqslant\infty$, тождественно равных нулю вне некоторого компакта $K(f)\subset G$.

Теорема 1. *Сходимость в $L^r(G)$ спектральных разложений $E_\lambda f$ для всех $f\in L_p(G)\cap\mathscr{E}_0'$ имеет место тогда и только тогда, когда $p\geqslant 2\geqslant r$.*

В том частном случае, когда $A(s)=-\sum\limits_1^N s_k^2$, $G=T^N$ — куб в R^N со стороной 2π и A — расширение $A_{\min}$, порожденное периодическими граничными условиями, мы получаем

Предложение 1. *Шаровые частичные суммы*

$$E_\lambda f=\sum_{\sum\limits_1^N j_k^2<\lambda} f_j\exp(i\langle j,x\rangle)$$

кратного ряда Фурье сходятся в $L^r(T^N)$, $N\geqslant 2$, для всех $f\in L_p(T^N)$ тогда и только тогда, когда $p\geqslant 2\geqslant r$. В частности, существует непрерывная функция на торе T^N, шаровые частичные суммы ряда Фурье которой не ограничены во всех $L^p(T^N)$ при $p>2$.

Теорема 2. *Если $p<2$ и $\gamma<(N-1)(1/p-{}^1/_2)$, то существует $f\in L^p(G)\cap\mathscr{E}_0'$ такая, что*

$$M_\gamma(f)=\sup_{\lambda\geqslant 1}\left|\frac{(E_\lambda f)(x)}{(\log\lambda)^\gamma}\right|=\infty$$

на множестве положительной меры. В условиях предложения 2 такую f можно выбрать так, что $M_\gamma(f)\ (x)=\infty$ почти всюду на торе.

2. Доказательства, как и в ([3]), основаны на двух леммах: одна лемма является количественным уточнением известного результата Ч. Фефермана о шаровом проекторе, проведенного Б. С. Митягиным в ([3]); другая основана на результатах Е. М. Никишина о слабом типе сублинейного оператора ([4]). Сформулируем эти леммы в нужном нам виде.

Л е м м а 1. *Пусть* $p\neq 2$ и $\gamma<(N-1)\,|{}^1/_2-1/p|$, F — *некоторый компакт в* G *положительной меры.*

Тогда

$$\|P_F E_\lambda P_F\|_p \geqslant C(\log\lambda)^\gamma,$$

где P_F — *проектор умножения на характеристическую функцию* χ_F *множества* F, *а* $C>0$ *не зависит от* λ.

Л е м м а 2. *Пусть* M: $L^p(G)\to L^0(G)$ — *сублинейный ограниченный оператор,* $p\leqslant 2$.

Тогда для любого $\varepsilon>0$ *найдется компакт* F, $\operatorname{mes} F>\operatorname{mes} G-\varepsilon$, *если* $\operatorname{mes} G<\infty$, *или* $\operatorname{mes} F>1/\varepsilon$, *если* $\operatorname{mes} G=\infty$, *такой, что оператор* $P_F M P_F$ *имеет слабый тип* (p,p).

Отметим, что все операторы типа $P_F M_\gamma(f)$, действующие из L_p в $L_0(F)$, являются сублинейными и, если предположить, что на всех функциях из L_p

$$M_\gamma(f)<\infty$$

почти всюду, то операторы такого сорта становятся ограниченными в смысле $L_p\to L_0$. Доказательство этого факта можно найти в работе ([4]).

3. Д о к а з а т е л ь с т в а т е о р е м. В силу самосопряженности E_λ и поскольку $L^p(F)$ вложены друг в друга, если $\operatorname{mes} F<\infty$, достаточно при анализе теоремы 1 рассмотреть лишь случай $r=1$ и $p<2$. Предположим, что $G'\subset G$, $\operatorname{mes} G'<\infty$ и

$$\lim_{\lambda\to\infty}(E_\lambda f)\overset{L_1}{=}f$$

для любой $f\in L^p(G')$, $p<2$. Тогда нормы $\|E_\lambda\colon L^p(G')\to L^1(G')\|$ равномерно ограничены и сублинейный оператор

$$(Mf)(x)=\sum_{n=1}^{\infty}|(E_{2^{2^n}}f)(x)|\frac{1}{n^2} \tag{1}$$

действует из L_p в L_0. Действительно, ряд интегралов

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_{G'}|(E_{2^{2^n}}f)(x)|\,dx\,\frac{1}{n^2}\leqslant C\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\|f\|_p}{n^2}<\infty$$

сходится. Так что ряд (1) сходится почти всюду. По лемме 2 сублинейный оператор $P_F M P_F$ имеет слабый тип (p,p) для некоторого компакта $F\subset G'$. В силу ограниченности E_λ в L^2 этот оператор имеет сильный тип $(2,2)$, так что по интерполяционной теореме Марцинкевича $P_F M P_F$ ограничен в $L^r(F)$ для любого $r\in(p,2]$. Но $\|E_{2^{2^n}}f\|_r\leqslant n^2\|Mf\|_r$, так что $\|P_F M P_F\|\leqslant n^2 C$, и в силу леммы 1 $2^{\gamma n}<C_1 n^2$ при всех $n=1,2,\ldots$ и некоторых $\gamma>0$, $C_1>0$. Это противоречие доказывает теорему 1.

Уточнение проведенных рассуждений показывает, что справедливо

П р е д л о ж е н и е 2. *Если* $p<2$ *и* $\delta<(N-1)(1/p-{}^1/_2)$, *то для любого компакта* F, $0<\operatorname{mes} F<\infty$,

$$\lim_{\lambda\to\infty}\frac{\|E_\lambda|L^p(F)\to L^1(F)\|}{(\log\lambda)^\delta}=\infty$$

Аналогично доказывается теорема 3.

Центральный экономико-математический институт
Академии наук СССР
Москва

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
16 I 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] C. F e f f e r m a n, Bull. AMS, 77, № 2, 191 (1971). [2] Б. С. М и т я г и н, Е. М. Н и к и ш и н, ДАН, 210, № 1 (1973). [3] Б. С. М и т я г и н, Функциональный анализ, № 6, в. 3 (1972). [4] Е. М. Н и к и ш и н, Изв. АН СССР, сер. матем., 36, № 4 (1972).