Доклады Академии наук СССР
1974. Том 216, № 3

УДК 517.52 МАТЕМАТИКА

А. Т. ТАЛДЫКИН

О ПРИЗНАКАХ БАЗИСА ГИЛЬБЕРТОВА ПРОСТРАНСТВА

(Представлено академиком С. М. Никольским 29 X 1973)

Последовательность (система) векторов (элементов)

$$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \ldots \tag{1}$$

гильбертова пространства H называется базисом этого пространства, если любой его вектор (элемент) f разлагается в сильно сходящийся (т. е. сходящийся по норме пространства H) ряд по векторам системы (1)

$$f=\sum_{i=1}^{\infty} c_i\varphi_i \tag{2}$$

и это разложение единственно.

Известно, что для того, чтобы система векторов (1) была базисом H, необходимо, чтобы она была минимальной и полной в H. В том и только в том случае, когда система векторов (1) минимальна, она имеет биортогональную ей систему векторов из H

$$\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n, \ldots \tag{3}$$

т. е. такую, что $(\varphi_i, \psi_k)=v_{ik}$, $i, k=1, 2, \ldots$

Когда система векторов (1) есть базис H, то и биортогональная ей система векторов (3) тоже является базисом H ([1], стр. 371). Таким образом, для каждого вектора f из H будем иметь разложение

$$f=\sum_{i=1}^{\infty} d_i\psi_i \tag{4}$$

и это разложение в сильно сходящийся ряд по векторам системы (3) единственно.

Можно с самого начала, не нарушая общности, считать матрицу Грама

$$\Phi=[\varphi_{ij}], \quad i, j=1, 2, \ldots, \quad \varphi_{ij}=(\varphi_i, \varphi_j), \tag{5}$$

системы векторов (1) положительно определенной, а матрицу Грама союзной с ней системы (3)

$$\Psi=[\psi_{ij}], \quad i, j=1, 2, \ldots, \quad \psi_{ij}=(\psi_i, \psi_j), \tag{6}$$

ограниченной.

Если матрица (6) ограничена, то каждую последовательность $\{x_k\}$ комплексных чисел с $\sum\limits_{k=1}^{\infty}|x_k|^2<\infty$ можно считать последовательностью компонент некоторого вектора g из H по векторам системы (1), так как ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k\psi_k$ сильно сходится и его сумма имеет числа x_k компонентами по векторам системы (1).

Признак базиса гильбертова пространства будет выражен через наибольшее собственное значение произведения

$$\Psi_n \Phi_n \tag{7}$$

n-х вырезов Ψ_n и Φ_n матриц Грама систем векторов (3) и (1). Собственные значения матрицы (7) определяются как корни уравнения $\det(\Psi_n\Phi_n - \rho I_n) = 0$. Эти собственные значения будут корнями уравнений

$$\det(\Psi_n - \rho\Phi_n^{-1}) = 0, \tag{8}$$

$$\det(\Phi_n - \rho\Psi_n^{-1}) = 0. \tag{9}$$

Корни этих уравнений в нашем случае все вещественны и положительны. Они являются характеристическими числами квадратичной формы

$$(\Psi_n x, x) = \sum_{i,j=1}^{n}\sum \psi_{ij} x_i \bar{x}_j \tag{10}$$

по отношению к квадратичной форме

$$(\Phi_n^{-1} x, x) = \sum_{i,j=1}^{n}\sum \varphi_n^{ji} x_i \bar{x}_j, \tag{11}$$

где φ_n^{ij} — элементы матрицы, обратной для Φ_n.

Т е о р е м а 1 (основная). *Для того чтобы минимальная и полная в H система векторов* (1), *а вместе с ней и биортогональная ей система векторов* (3) *была базисом гильбертова пространства H, необходимо и достаточно, чтобы наибольшее собственное значение матрицы* (7), *где Φ_n и Ψ_n — n-е вырезы матриц Грама* (5) *и* (6) *систем* (1) *и* (3), *стремилось к единице при $n \to \infty$.*

У с л о в и е н е о б х о д и м о. Пусть система векторов (1) является базисом H. Не нарушая общности, можно считать матрицу Грама (5) системы векторов (1) положительно определенной, а матрицу Грама (6) системы векторов (3) ограниченной. Введем в рассмотрение матрицу $[R_n^{ij}]$ с элементами $R_n^{ij} = \psi_{ij} - \psi_n^{ij}$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$, $R_n^{ij} = \psi_{ij}$, когда хотя бы один из индексов i или j больше, чем n. Тогда при любой числовой последовательности $x = \{x_i\}$ с $\sum\limits_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 < \infty$ будем иметь

$$(R_n x, x) = \sum_{i,j=1}\sum R_n^{ij} x_i \bar{x}_j = \sum_{i,j=1}\sum \psi_{ij} x_i \bar{x}_j - \sum_{i,j=1}\sum \varphi_n^{ji} x_i \bar{x}_j = \|g\|^2 - \|g_n\|^2 \to 0 \tag{12}$$

при $n \to \infty$, где $g = \sum\limits_{i=1}^{\infty} x_i \psi_i$ — вектор из H с компонентами x_i по векторам системы (1), а g_n — его наилучшее приближение n-го порядка с помощью n первых векторов системы (1).

Пусть T_n — линейный ограниченный оператор в H, ассоциированный с матрицей $[R_n^{ij}]$, т. е. такой, что для любых $x = \{x_i\}$ и $y = \{y_i\}$ из H имеет место равенство

$$(R_n x, y) = \sum_{i,j=1}\sum R_n^{ij} x_i \bar{x}_j = (T_n x, y).$$

Этот оператор самосопряженный и неотрицательный. В силу того, что $(R_n x, y) \to 0$ при $n \to \infty$ для любых x и y из H, последовательность операторов T_n слабо сходится к нулю, а так как это последовательность неотрицательных операторов, то она и сильно сходится к нулю ([3], стр. 561). Ввиду того, что $(R_n x, x)$ есть невозрастающая при $n\to\infty$ последовательность симметричных, равномерно ограниченных снизу форм, стремящаяся к нулю, последовательность ассоциированных операторов $\{T_n\}$ сильно сходится в обобщенном смысле к нулевому оператору ([3], стр. 567). По известной теореме ([3], стр. 586), если $S\subset R$ — открытое множество, содержащее спектр предельного оператора, то спектр оператора T_n асимптотически концентрируется на S, т. е. если $E_n(S)$ — спектральная мера, построенная с помощью спектрального семейства $E_n(\lambda)$ оператора T_n, то $E_n(R-S)\to 0$ при $n\to\infty$, где $R-S$ — дополнение множества S в R. Таким образом, начиная с некоторого n, спектр оператора T_n находится в произвольно малой окрестности нуля, так как в противном случае не выполнялось бы соотношение $s-\lim\limits_{n\to\infty} E_n(\lambda)=E(\lambda)$, которое должно иметь место ([3], стр. 537).

Так как формы (10) и (11) положительны, то одним и тем же унитарным преобразованием они могут быть приведены к сумме квадратов переменных и их разность примет вид

$$(r_n x, x)=\sum_{k=1}^{n}\mu_k^{(n)}|\xi_k^{(n)}|^2=\sum_{k=1}^{n}v_k^{(n)}|\xi_k^{(n)}|^2-\sum_{k=1}^{n}\lambda_k^{(n)}|\xi_k^{(n)}|^2,$$

причем наибольшее $\mu_n^{(n)}$ из чисел $\mu_k^{(n)}=v_k^{(n)}-\lambda_k^{(n)}$ есть максимум отношения первой формы ко второй. Так как спектр усеченной формы $(r_n x, x)$ не выходит за границы спектра усекаемой формы $(R_n x, x)$, то наибольшее число $\mu_n^{(n)}=v_n^{(n)}-\lambda_n^{(n)}$ спектра формы $(r_n x, x)$, начиная с некоторого n, находится в произвольно малой окрестности нуля, т. е. при $n\to\infty$ стремится к нулю. Отсюда следует, что отношение $v_n^{(n)}/\lambda_n^{(n)}$, т. е. максимум отношения первой формы (10) ко второй форме (11) стремится к единице и, значит, наибольшее число спектра матрицы (7) при $n\to\infty$ стремится к единице, что и требовалось доказать.

Условие достаточно. Пусть у минимальной и полной в H системе векторов (1) и союзной с ней системы (3) матрицы Грама таковы, что наибольшее число спектра $\rho_n^{(n)}$ матрицы (7) стремится к единице при $n\to\infty$. Так как отношение формы (10) к форме (11) заключено между наименьшим $\rho_1^{(n)}$ и наибольшим $\rho_n^{(n)}$ числами спектра матрицы (7) при всех числах $x_1,\dots,x_n$, то, в частности, когда эти числа являются компонентами $A_1,\dots$ $\dots, A_n$ вектора f по векторам системы (1), можно написать

$$\rho_1^{(n)}\sum_{i,j=1}^{n}\sum\varphi_n^{ji}A_i\bar{A}_j\leqslant\sum_{i,j=1}^{n}\sum\psi_{ij}A_i\bar{A}_j\leqslant\rho_n^{(n)}\sum_{i,j=1}^{n}\sum\varphi_n^{ji}A_i\bar{A}_j.$$

Так как при полной системе векторов всегда [2]

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i,j=1}^{n}\sum\varphi_n^{ji}A_i\bar{A}_j=\|f\|^2,$$

то при $\rho_n^{(n)}\to 1$, когда и $\rho_1^{(n)}\to 1$, так как все $\rho_k^{(n)}\geqslant 1$, $k=1,\dots,n$, существует

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i,j=1}^{n}\sum\psi_{ij}A_i\bar{A}_j=\|f\|^2.$$

Если учесть, что наилучшее приближение $\sum_{i=1}^{n} a_n^i\varphi_i$ n-го порядка к вектору f с помощью векторов системы (1) при $n\to\infty$ всегда сильно сходится к f [2], то легко увидеть, что имеет место

$$f=\sum_{i=1} A_i\psi_i, \qquad A_i=(f,\varphi_i),$$

так как

$$\left\|\sum_{i=1}^{n}A_i\psi_i-\sum_{i=1}^{n}a_n^i\varphi_i\right\|^2=\sum_{i,j=1}^{n}\sum\psi_{ij}A_i\bar{A}_j-\sum_{i=1}^{n}A_i\overline{a_n^i}-\sum_{i=1}^{n}\bar{A}_ia_n^i+$$

$$+\sum_{i,j=1}^{n}\sum\varphi_{ij}a_n^i\overline{a_n^j}=\sum_{i,j=1}^{n}\sum\psi_{ij}A_i\bar{A}_j-\sum_{i,j=1}^{n}\sum\varphi_n^{ji}A_i\bar{A}_j\to0$$

при $n\to\infty$. Здесь мы воспользовались соотношением $a_n^i=\sum_{k=1}^{n}\varphi_n^{ik}A_{ik}$, $i=1, 2, \ldots, n$, связывающим компоненты A_k вектора f с коэффициентами a_n^i наилучшего приближения [2]. Единственность разложения (17) следует из того, что система векторов (3) минимальна.

Теорема 2. *Если у минимальной и полной в H системы векторов* (1) *и союзной с ней системы* (3) *матрицы Грама* (5) *и* (6) *таковы, что произведение* $\det\Phi_n\cdot\det\Psi_n$, *определителей n-х вырезов этих матриц стремится к единице при $n\to\infty$, то системы векторов* (1) *и* (3) *являются базисами H.*

Действительно, $\det\Phi_n\cdot\det\Psi_n=\rho_1^{(n)}\cdot\rho_2^{(n)}\ldots\rho_n^{(n)}$ и, прологарифмировав, мы убедимся, что $\ln\rho_n^{(n)}\to0$, а следовательно, $\rho_n^{(n)}\to1$ при $n\to\infty$.

Замечание. Если минимальная система векторов (1) не является полной в H, то, чтобы она была базисом замыкания своей линейной оболочки, необходимо и достаточно, чтобы наибольшее собственное значение матрицы (7) стремилось к единице при $n\to\infty$.

Ленинградский государственный университет
им. А. А. Жданова

Поступило
9 X 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн*, Введение в теорию несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве, «Наука», 1965. [2] *S. Lewin*, Math. Zs., B. 32, 491 (1930). [3] *Т. Като*, Теория возмущений линейных операторов, 1972.