Доклады Академии наук СССР
1974. Том 216, № 4

УДК 517.54+513.88:519.4+517.948.5 *МАТЕМАТИКА*

Д. З. АРОВ

ТЕОРИЯ РАССЕЯНИЯ С ДИССИПАЦИЕЙ ЭНЕРГИИ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 30 X 1973)

1°. Теория рассеяния с диссипацией энергии рассматривается нами как теория сжимающих сцеплений с потерями.

В работе используется система обозначений, принятая в [9].

Полугруппа сжатий Z_t в (сепарабельном) гильбертовом пространстве $\mathfrak{K}$, $Z_t\in[\mathfrak{K},\mathfrak{K}]$, называется **сжимающим сцеплением** полугрупп (простых) полуунитарных операторов $V_t^\pm\in[\mathfrak{D}^\pm,\mathfrak{D}^\pm]$, если $\mathfrak{D}^\pm\subset\mathfrak{K}$, $V_t^-=Z_t^*|\mathfrak{D}^-$, $V_t^+=Z_t|\mathfrak{D}^+$. Обозначим $\mathfrak{K}_Z^-=\bigvee\limits_0^\infty Z_t\mathfrak{D}^-$, $\mathfrak{K}_Z^+=\bigvee\limits_0^\infty Z_t^*\mathfrak{D}^+$.

Будем говорить, что Z_t — сцепление **без потерь**, если $\mathfrak{K}_Z^-=\mathfrak{K}_Z^+$ и $Z_t|\mathfrak{K}_Z^\pm$ — полугруппа унитарных операторов; в противном случае Z_t — сцепление **с потерями**. Ранее [1–5] рассматривались унитарные сцепления, теория которых возникла на базе работ [6–8].

Пусть U_t — произвольная унитарная дилатация [9] сцепления Z_t полугрупп $V_t^\pm$. Тогда U_t — унитарное сцепление полугрупп $V_t^\pm$ и потому определены [3] приходящее и уходящее представления $\mathcal{F}_U^\pm$. Положим $\mathcal{F}_Z^\pm=\mathcal{F}_U^\pm|\mathfrak{K}$; $\mathcal{F}_Z^\pm\in[\mathfrak{K},L^2(\mathfrak{N}^\pm)]$, где $\mathfrak{N}^\pm$ — дефектные подпространства когенераторов полугрупп $V_t^\pm$. Представления $\mathcal{F}_Z^\pm$ не зависят от выбора дилатации U_t и могут быть определены без введения в рассмотрение U_t. Существует функция $s_Z(\mu)\in L^\infty(\mathfrak{N}^-,\mathfrak{N}^+)$, $\|s_Z\|_\infty\le1$, такая, что

$$(\mathcal{F}_Z^+h)(\mu)=s_Z(\mu)(\mathcal{F}_Z^-h)(\mu),\quad h\in\mathfrak{D}^-.$$

Она определяется этим соотношением однозначно и $s_Z(\mu)=s_U(\mu)$. Назовем ее **субоператором рассеяния** Z_t. Можно определить $s_Z(\mu)$ с помощью волновых операторов точно так, как это сделано в [3, 4] для унитарных сцеплений.

Теорема 1. *Для того чтобы Z_t было сжимающим сцеплением без потерь, необходимо и достаточно, чтобы функция $s_Z(\mu)$ была унитарнозначной (почти всюду).*

Для сжимающего ортогонального сцепления Z_t, когда $\mathfrak{D}^-\perp\mathfrak{D}^+$ в $\mathfrak{K}$, введем в рассмотрение соответствующую полугруппу сжатий $T_t\in[\mathfrak{H},\mathfrak{H}]$,

$$\mathfrak{H}=\mathfrak{K}\ominus(\mathfrak{D}^-\oplus\mathfrak{D}^+),\qquad T_t=P_\mathfrak{H}Z_t|\mathfrak{H}.$$

Теорема 2. *Для любого сжимающего сцепления Z_t*

$$\lim_{t\to\infty}Z_t^*Z_t\geqslant(\mathcal{F}_Z^+)^*\cdot(\mathcal{F}_Z^+),\quad \lim_{t\to\infty}Z_tZ_t^*\geqslant(\mathcal{F}_Z^-)^*\cdot(\mathcal{F}_Z^-).\qquad(1)$$

Для сжимающего ортогонального сцепления в (1) знак равенства имеет место тогда и только тогда, когда соответствующая полугруппа сжатий T_t принадлежит классу $C_{0\cdot}$ (когда $T_t\in C_{\cdot0}$) *.

* $T_t\in C_{0\cdot}$, если $T_t\to0$ и $T_t\in C_{\cdot0}$, если $T_t^*\to0$; по поводу классов $C_{0\cdot}$ и $C_{\cdot0}$ см. [9].

Для ортогонального (и только для такого) сцепления Z_t функция $s_Z(\mu)$ является граничным значением некоторой B-функции $s_Z(\lambda)$ при $\operatorname{Im}\lambda<0$ (голоморфной и сжимающей), называемой матрицей рассеяния сцепления Z_t.

Если полугруппа сжатий $\tilde{Z}_t$ — дилатация сцепления Z_t, то $s_{\tilde{Z}}(\mu)=s_Z(\mu)$.

Сжимающее сцепление полугрупп $V_t^{\pm}$ назовем **минимальным**, если оно не является дилатацией никакого другого сцепления полугрупп $V_t^{\pm}$.

Сцепление $Z_t\in[\mathfrak{K},\mathfrak{K}]$ является минимальным тогда и только тогда, когда $\mathfrak{K}=\overline{\mathfrak{K}_Z^{-}+\mathfrak{D}^{+}}=\overline{\mathfrak{K}_Z^{+}+\mathfrak{D}^{-}}$. Произвольное сжимающее сцепление полугрупп $V_t^{\pm}$ является дилатацией некоторого минимального сжимающего сцепления этих полугрупп.

Минимальное унитарное сцепление U_t $(\mathfrak{K}=\overline{\mathfrak{K}_U^{-}+\mathfrak{K}_U^{+}})$ является минимальным сжимающим сцеплением тогда и только тогда, когда

$$\overline{[I-s_U^{*}(\mu)s_U(\mu)]^{1/2}H_-^2(\mathfrak{N}^-)}=\overline{[I-s_U^{*}(\mu)s_U(\mu)]^{1/2}L^2(\mathfrak{N}^-)},$$
$$\overline{[I-s_U(\mu)s_U^{*}(\mu)]^{1/2}H_+^2(\mathfrak{N}^+)}=\overline{[I-s_U(\mu)s_U^{*}(\mu)]^{1/2}L^2(\mathfrak{N}^+)}.$$

2°. Перейдем от полугрупп Z_t, $V_t^{\pm}$ и T_t к их когенераторам Z, $V^{\pm}$ и T. Тогда Z — (сжимающее) сцепление полуунитарных операторов $V^{\pm}$, $V^{-}=Z^{*}|\mathfrak{D}^{-}$, $V^{+}=Z|\mathfrak{D}^{+}$, причем Z — дилатация сжатия T. При этом унитарные, ортогональные, минимальные сцепления, с потерями без потерь, переходят в соответствующие.

Для сжимающего ортогонального сцепления Z операторов $V^{\pm}$ рассмотрим сжатие $V\in[\mathfrak{N}^{-}\oplus\mathfrak{H},\ \mathfrak{H}\oplus\mathfrak{N}^{+}]$,

$$V=Z|\mathfrak{N}^{-}\oplus\mathfrak{H},\quad Z=(V^{-})^{*}P_{V^{-}\mathfrak{D}^{-}}+VP_{\mathfrak{N}^{-}\oplus\mathfrak{H}}+V^{+}P_{\mathfrak{D}^{+}};$$

V — параметр, которым описывается расширение Z изометрического оператора $(V^{-})^{*}\oplus V^{+}|V^{-}\mathfrak{D}^{-}\oplus\mathfrak{D}^{+}$.

Совокупность гильбертовых пространств $\mathfrak{N}^{-}$, $\mathfrak{N}^{+}$, $\mathfrak{H}$ и (сжатия) $V\in[\mathfrak{N}^{-}\oplus\mathfrak{H},\ \mathfrak{H}\oplus\mathfrak{N}^{+}]$ назовем (**сжимающим**) **узлом** и обозначим через $\alpha=\{V;\ \mathfrak{N}^{-}\oplus\mathfrak{H}\oplus\mathfrak{N}^{+}\}$. С помощью произвольного (сжимающего) узла α осуществляется некоторое (сжимающее) ортогональное сцепление Z. Введем в рассмотрение блоки оператора V:

$$F=P_{\mathfrak{H}}V|\mathfrak{N}^{-}\in[\mathfrak{N}^{-},\mathfrak{H}],\quad T=P_{\mathfrak{H}}V|\mathfrak{H}\in[\mathfrak{H},\mathfrak{H}],\quad G=P_{\mathfrak{N}^{+}}V|\mathfrak{H},\quad S=P_{\mathfrak{N}^{+}}V|\mathfrak{N}^{-}$$

и определим **характеристическую функцию** узла α по формуле *

$$\Theta_{\alpha}(z)=S+zG(I-zT)^{-1}F\quad(\text{в окрестности } z=0).\tag{2}$$

Оказывается, что матрица рассеяния $s_Z(\lambda)$ лишь преобразованием над аргументом $\lambda=i(z-1)/(z+1)$ отличается от характеристической функции $\Theta_{\alpha}(z)$ соответствующего узла α.

Дилатации сцепления отвечает дилатация соответствующего узла, минимальному сцеплению — минимальный узел.

Узел $\tilde{\alpha}=\{\tilde{V};\ \mathfrak{N}^{-}\oplus\tilde{\mathfrak{H}}\oplus\mathfrak{N}^{+}\}$ является дилатацией узла $\alpha=\{V;\ \mathfrak{N}^{-}\oplus\mathfrak{H}\oplus\mathfrak{N}^{+}\}$, если $\tilde{\mathfrak{H}}\supset\mathfrak{H}$, $V=P_{\mathfrak{H}\oplus\mathfrak{N}^{+}}\tilde{V}|\mathfrak{N}^{-}\oplus\mathfrak{H}$ и если $\tilde{\mathfrak{H}}=\mathfrak{D}^{*}\oplus\mathfrak{H}\oplus\mathfrak{D}$, где $\mathfrak{D}^{*}$ и $\mathfrak{D}$ — такие подпространства, что $\tilde{V}^{*}\mathfrak{D}^{*}\subset\mathfrak{D}^{*}$, $\tilde{V}\mathfrak{D}\subset\mathfrak{D}$. При этом основной оператор $\tilde{T}$ узла $\tilde{\alpha}$ является дилатацией основного оператора T узла α, а для остальных блоков операторов $\tilde{V}$ и V имеет: $\tilde{S}=S$, $F=P_{\mathfrak{H}}\tilde{F}$, $G=\tilde{G}|\mathfrak{H}$, $\tilde{F}^{*}\mathfrak{D}^{*}=\{0\}$, $\tilde{G}\mathfrak{D}=\{0\}$. (Сжимающий) узел называется минимальным, если он не является дилатацией никакого другого (сжимающего) узла.

---

* См. [10, 11].

Теорема 3. *Для того чтобы (сжимающий) узел был минимальным, необходимо и достаточно чтобы*

$$\mathfrak{H}=\bigvee_0^\infty T^n F\mathfrak{N}^-,\quad \mathfrak{H}=\bigvee_0^\infty T^{*n}G^*\mathfrak{N}^+. \tag{3}$$

Произвольный (сжимающий) узел является дилатацией некоторого минимального (сжимающего) узла. Произвольная голоморфная при $z=0$ (В-функция при $|z|<1$) $\Theta(z)$ со значениями из $[\mathfrak{N},\mathfrak{N}_*]$ может быть реализована как характеристическая функция минимального (сжимающего) узла.

В теории систем ([12]) условия (3) означают соответственно управляемость и наблюдаемость системы.

В случае, когда $\Theta(z)\in B\Pi$ ([4, 16]) (и только тогда), основной оператор T некоторого минимального сжимающего узла α_0 с характеристической функцией $\Theta(z)$ принадлежит классу C_0. В этом случае для узла α_0 соотношением (2) определяется квазинепрерывное продолжение функции $\Theta(z)=\Theta_{\alpha_0}(z)$ вне единичного круга D. Таким образом, за особенности функции $\Theta(z)$ вне D (за особенности матрицы рассеяния $s_Z(\lambda)$ на «нефизическом листе» $\operatorname{Im}\lambda>0$) несет ответственность основной оператор T минимального узла α_0.

3°. Для сжимающего ортогонального сцепления Z_t введем в рассмотрение функции «напряжений» и «токов»:

$$u_h(\lambda)=2^{-1/2}[(\mathscr{F}_{Z}^-h)(\lambda)-(\mathscr{F}_{Z}^+h)(\lambda)],\quad i_h(\lambda)=2^{-1/2}[(\mathscr{F}_{Z}^-h)(\lambda)+(\mathscr{F}_{Z}^+h)(\lambda)]$$

(здесь предполагается, что $\mathfrak{N}^-=\mathfrak{N}^+=\mathfrak{N}$). Тогда

$$u_h(\lambda)=\mathscr{Z}(\lambda)i_h(\lambda),\quad \mathscr{Z}(\lambda)=[I-s_Z(\lambda)][I+s_Z(\lambda)]^{-1},\quad \operatorname{Im}\lambda<0.$$

Функцию $\mathscr{Z}(\lambda)$ назовем **импедансом** сцепления Z_t. Для дискретного варианта сжимающих сцеплений множество импедансов $C(z)$ образует класс C (Каратеодори). Импеданс определен лишь для такого сцепления, которое осуществляется с помощью узла α с ограниченно обратимым оператором $I+S$, $S=\Theta_\alpha(0)=P_{\mathfrak{N}}{}^+V|\mathfrak{N}^-$. Наложим на узел α еще дополнительное условие $F^*F+S^*S=I$ и введем в рассмотрение операторы

$$\Gamma_d=\operatorname{Im}(I-S)(I+S)^{-1},\quad F_d=F(I+S)^{-1},\quad T_d=T-F(I+S)^{-1}G.$$

Сжатие T_d является унитарным оператором тогда и только тогда, когда α — унитарный узел. Оказывается, что

$$([I-\Theta_\alpha(z)][I+\Theta_\alpha(z)]^{-1}=)C(z)=i\Gamma_d+F_d^*(I+zT_d)(I-zT_d)^{-1}F_d,\quad z\in D. \tag{4}$$

Совокупность гильбертовых пространств $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{H}$ и операторов $\Gamma_d\in[\mathfrak{N},\mathfrak{N}]$, $\Gamma_d^*=\Gamma_d$, $F_d\in[\mathfrak{N},\mathfrak{H}]$, $T_d\in[\mathfrak{H},\mathfrak{H}]$, $\|T_d\|\leqslant1$, назовем **диагональным узлом** и обозначим через $\alpha_d=\{\Gamma_d, F_d, T_d; \mathfrak{H}, \mathfrak{N}\}$. Функцию $\Theta_{\alpha_d}(z)$, стоящую в правой части равенства (4), назовем **характеристической функцией диагонального узла**. По произвольному диагональному узлу α_d однозначно восстанавливается соответствующий сжимающий узел α. Узел $\tilde{\alpha}_d=\{\Gamma_d, \tilde{F}_d, \tilde{T}_d; \tilde{\mathfrak{H}}, \mathfrak{N}\}$ назовем дилатацией узла $\alpha_d=\{\Gamma_d, F_d, T_d; \mathfrak{H}, \mathfrak{N}\}$, если $\tilde{T}_d$ — дилатация сжатия T_d, $F_d^*=\tilde{F}_d^*|\mathfrak{H}$ и $\tilde{F}_d^*(\tilde{\mathfrak{H}}\ominus\mathfrak{H})=\{0\}$.

Диагональный узел назовем минимальным, если он не является дилатацией никакого другого диагонального узла.

Для диагональных узлов и C-функций справедлива теорема, аналогичная теореме 3, которая приводит к обобщению результата ([13]).

4°. Пусть V_t^{I} и V_t^{II} — полугруппы полуунитарных операторов в $\mathfrak{D}^{\mathrm{I}}$ и $\mathfrak{D}^{\mathrm{II}}$, коммутирующих с J-операторами J^{I} и J^{II}, $J^*=J$, $J^2=I$. Пусть

$$\mathfrak{H}=\mathfrak{D}^{\mathrm{I}}\oplus\mathfrak{H}\oplus\mathfrak{D}^{\mathrm{II}},\quad J=J^{\mathrm{I}}\oplus I_{\mathfrak{H}}\oplus J^{\mathrm{II}}.$$

Полугруппу J-сжимающих операторов $\Pi_t \in [\mathfrak{H}, \mathfrak{H}]$, $J - \Pi_t^* J \Pi_t \geqslant 0$, $J - \Pi_t J \Pi_t^* \geqslant 0$, являющихся сцеплениями операторов V_t^{I} и V_t^{II}, назовем J-сжимающим (ортогональным) **сцеплением** полугрупп V_t^{I} и V_t^{II}.

Теорию прохождения будем рассматривать как теорию J-сжимающих сцеплений, осуществляемых, как и в дефинитном случае (при $J = I$) с помощью J-сжимающих узлов. При этом J-сжимающим узлом называется совокупность гильбертовых пространств $\mathfrak{N}^{\mathrm{I}}$, $\mathfrak{N}^{\mathrm{II}}$, $\mathfrak{H}$, J-операторов $\mathring{J}^{\mathrm{I}} \in [\mathfrak{N}^{\mathrm{I}}, \mathfrak{N}^{\mathrm{I}}]$ и $\mathring{J}^{\mathrm{II}} \in [\mathfrak{N}^{\mathrm{II}}, \mathfrak{N}^{\mathrm{II}}]$ и J-сжимающего оператора

$$V_J \in [\mathfrak{N}^{\mathrm{I}} \oplus \mathfrak{H}, \mathfrak{H} \oplus \mathfrak{N}^{\mathrm{II}}], \quad J_1 - V_J^* J_2 V_J \geqslant 0, \quad J_2 - V_J J_1 V_J^* \geqslant 0,$$

$$J_1 = \mathring{J}^{\mathrm{I}} \oplus I_{\mathfrak{H}}, \quad J_2 = I_{\mathfrak{H}} \oplus \mathring{J}^{\mathrm{II}}.$$

Для J-сжимающего ортогонального сцепления определяется матрица передачи и доказывается, что она лишь дробно-линейным преобразованием над аргументом отличается от характеристической функции соответствующего узла. Теорема 3 обобщается на J-сжимающие узлы и их характеристические функции. Связь между J-сжимающими и сжимающими сцеплениями (узлами) осуществляется известным ([14]) дробно-линейным преобразованием, переводящим J-сжимающие операторы в сжимающие.

Для вещественных сцеплений и узлов результаты соответствующим образом уточняются. Основные понятия и положения изложенной теории имеют естественную электротехническую интерпретацию. Ранее, в ([15]), активные сопротивления в конечной цепи предлагалось заменять соответствующими длинными линиями. Фактически предлагалось вместо сжимающих узлов рассматривать их унитарные дилатации, которые всегда существуют *.

К моменту окончания статьи автор познакомился с любезно присланным М. Г. Крейну препринтом П. Лакса и Р. Филлипса по теории рассеяния диссипативных гиперболических систем, где при построении общей теории по существу рассматриваются сжимающие сцепления, для которых в двух соотношениях (1) имеет место знак равенства.

Примечание при корректуре. Связи теории операторов и теории систем посвящен также присланный автору препринт В. Хелтона.

Одесский педагогический институт
им. К. Д. Ушинского

Поступило
13 IX 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *В. М. Адамян, Д. З. Аров*, ДАН, т. 160, № 1, 9 (1965). [2] *В. М. Адамян, Д. З. Аров*, ДАН, т. 165, № 1, 9 (1965). [3] *В. М. Адамян, Д. З. Аров*, Математические исследования, Кишинев, т. 1, в. 2, 3 (1966). [4] *Д. З. Аров*, ДАН, т. 201, № 3 (1971). [5] *В. М. Адамян*, Функциональный анализ и его приложения, т. 7, в. 4, 1 (1973). [6] *P. Lax, R. S. Phillips*, Bull. Am. Math. Soc., v. 70, 130 (1964). [7] *B. Sz-Nagy, C. Foias*, Acta Sci. Math., v. 25, 38 (1964). [8] *B. Sz-Nagy, C. Foias*, ibid., v. 23, 130 (1962). [9] *Б. Секефальви-Надь, Ч. Фояш*, Гармонический анализ операторов в гильбертовом пространстве, М., 1970. [10] *М. С. Лившиц*, Математич. сборн., т. 19, 239 (1964). [11] *В. М. Бродский*, ДАН, т. 198, № 1, 16 (1971). [12] *Р. Калман, П. Фалб, М. Арбиб*, Очерки по математической теории систем, М., 1971. [13] *Р. Калман*, Тр. V Международн. конфер. по нелинейным колебаниям, Киев, т. 2, 1969, стр. 189. [14] *Ю. П. Гинзбург*, Научн. зап. физико-математич. фак. Одесск. педагогич. инст, т. 22, в. 1 (1958). [15] *М. С. Лившиц*, Операторы, колебания, волны, «Наука», 1966. [16] *Д. З. Аров*, Функциональный анализ и его приложения, т. 8, в. 2, 1 (1974).

* Также всегда существуют J-унитарные дилатации J-сжимающих узлов.