

В. В. АСЕЕВ

**ПРИМЕР НЕД-МНОЖЕСТВА В  $n$ -МЕРНОМ ЭВКЛИДОВОМ  
ПРОСТРАНСТВЕ, ИМЕВШЕГО ПОЛОЖИТЕЛЬНУЮ  
( $n - 1$ )-Ю МЕРУ ХАУСДОРФА**

(Представлено академиком М. А. Лаврентьевым 12 XII 1973)

Точки  $n$ -мерного евклидова пространства  $R^n$  будем обозначать  $x = (x_1, \dots, x_n)$  или  $y = (y_1, \dots, y_n)$ , а также буквами  $P$  и  $Q$ . Символ  $\partial$  означает границу множества,  $B$  — единичный шар в  $R^n$ ,  $m(B)$  — его объем,  $B(P, r) = \{x \in R^n; \|x - P\| < r\}$ .

Пусть  $G \subset R^n$  и  $f(x)$  — вещественная функция, заданная на  $G$ , тогда

$$\|f(x)\|_G = \left\{ \int_G [f(x)]^n dx \right\}^{1/n},$$

где  $dx$  — элемент объема в  $R^n$ . Кривая  $\gamma$  есть непрерывный образ отрезка  $[0, 1]$ , и интеграл  $\int_\gamma \rho d\Lambda'$  от измеримой по Борелю функции понимается

как интеграл по одномерной мере Хаусдорфа; в случае, если  $\gamma$  спрямляема, то  $\int_\gamma \rho ds$  понимается как интеграл Лебега — Стильтьеса, где  $ds$  — элемент длины.

Пусть  $\Gamma$  — семейство кривых в  $R^n$ ; совокупность метрик, допустимых для  $\Gamma$ , обозначаем  $F(\Gamma)$ ; модуль семейства  $\Gamma$  обозначаем  $M(\Gamma)$  (см. (1)). Пусть  $\Gamma$  — некоторое семейство спрямляемых кривых, лежащих в области  $G \subset R^n$ . Рассмотрим вещественную функцию  $f(x)$  на  $G$ , для которой:

(I)  $f \geq 0$  на  $G$  и  $f(x) \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow \partial G$ ;

(II)  $f$  удовлетворяет на  $G$  условию Липшица с константой  $(1 - \alpha)$ , где  $0 < \alpha < 1$ .

На совокупности  $F(\Gamma)$  допустимых для  $\Gamma$  метрик  $\rho(x)$  таких, что  $\rho(x) = 0$  вне  $G$ , определен оператор  $T_f$ ,

$$(T_f \rho)(x) = (m(B))^{-1} \int_{y \in B} \rho(x + f(x)y) dy, \quad x \in G.$$

Если  $\rho(x) \in F(\Gamma)$ , то  $T_f \rho$  является непрерывной функцией на  $G \setminus \{x \in G: f(x) = 0\}$ . В силу (II)  $f \in \text{ACL}$  и отображение  $\psi_y: x \rightarrow x + f(x)y$ ,  $\|y\| < 1$ , осуществляет квазиконформный гомеоморфизм  $G$  на себя, оставляя неподвижным множество  $\{x \in G: f(x) = 0\}$ .

**Лемма 1.** Если  $f(x)$  удовлетворяет (I), (II), то для любой  $\rho(x) \in F(\Gamma)$

$$\|T_f \rho\|_G \leq \|\rho\|_G \alpha^{-1}.$$

Если  $\gamma \in \Gamma$  и  $\psi_y(\gamma) \in \Gamma$  при любом  $y \in B$ , то

$$\int_\gamma (T_f \rho) ds \geq (2 - \alpha)^{-1}.$$

При доказательстве этой леммы применяются те же рассуждения, с помощью которых в (2) были получены аналогичные оценки.

Будем говорить, что семейство  $\Gamma_D$  аналитично на открытом множестве  $D$ , если для любой  $\gamma \in \Gamma_D$  существует параметризация  $\varphi(t)$

$$\gamma = \{x \in R^n: x_i = \varphi_i(t), t \in [0, 1], i = 1, \dots, n\}$$

такая, что  $\varphi_i(t)$  — вещественные аналитические функции в окрестности всякой точки  $t \in (0, 1)$ , для которой  $\varphi(t) \in D$ .

**Теорема 1.** Пусть  $G$  — область в  $R^n$ ,  $F_1$  и  $F_2$  — непересекающиеся компактные множества на  $\partial G$ ,  $D$  — открытое множество,  $D \subset G$ . Пусть  $\Gamma$  — семейство всевозможных кривых в  $G$ , соединяющих  $F_1$  и  $F_2$ , а  $\Gamma_D$  — совокупность тех кривых из  $\Gamma$ , которые аналитичны на  $D$ . Имеет место равенство  $M(\Gamma) = M(\Gamma_D)$ .

**Доказательство.** Пусть  $d$  есть расстояние между  $\partial D$  и  $\partial G$ .  $\{B_i(P_i, d/2)\}$  — конечное покрытие  $\partial G$  и пусть  $D' = G \setminus \cup B_i$ . Функция

$$f(x) = \begin{cases} \varepsilon r(x) & \text{при } x \in G \cap G(\cup \bar{B}_i), \\ \varepsilon \prod_i \ln \left( \frac{\|x - P_i\|}{d} \right) & \text{при } x \in D', \end{cases}$$

где  $r(x)$  — расстояние до  $\partial G \cup \partial D'$ , при достаточно малых  $\varepsilon > 0$  удовлетворяет условиям (I), (II) и является аналитической функцией на  $D'$ , откуда следует, что  $\Psi_\varepsilon$  при любом  $y \in B$  переводит  $\Gamma_D$  в себя. В силу леммы 1 при любой  $\rho(x) \in F(\Gamma_D)$  метрика  $(1+\varepsilon)T_\varepsilon \rho \in F(\Gamma_D)$ . Пусть  $d'$  — расстояние между  $\partial G$  и  $\partial D'$ ,  $\{B_j(Q_j, d'/2)\}$  — конечное покрытие  $\partial G$ , и пусть  $D'' = G \setminus \cup B_j$ . Пусть

$$f_1(x) = \begin{cases} \varepsilon r_1(x) & \text{при } x \in G \setminus \cup \bar{B}_j, \\ \varepsilon \prod_j \ln (\|x - Q_j\| / 2d') & \text{при } x \in D'', \end{cases}$$

где  $r_1(x)$  — расстояние до  $\partial G \cup \partial D''$ . Для любой  $\rho(x) \in F(\Gamma_D)$  метрика  $\bar{\rho} = (1+\varepsilon)^2 T_\varepsilon T_\varepsilon \rho \in F(\Gamma_D)$  и непрерывна в  $G$ . При этом

$$\|\bar{\rho}\|_G^n \leq (1+\varepsilon)^{2n} (1-\varepsilon)^{-2} \|\rho\|_G^n.$$

Произвольную кривую  $\gamma \in \Gamma$  можно равномерно аппроксимировать кривыми из  $\Gamma_D$ . Пользуясь непрерывностью  $\bar{\rho}(x)$  и переходя к пределу в интеграле Лебега — Стильтьеса, получаем

$$\int_\gamma \bar{\rho}(x) ds = \lim_{\gamma' \rightarrow \gamma} \int_{\gamma'} \bar{\rho} ds \geq 1,$$

т. е.  $\bar{\rho}(x) \in F(\Gamma)$ . Следовательно,

$$M(\Gamma) \leq \|\bar{\rho}\|_G^n \leq (1+\varepsilon)^{2n} (1-\varepsilon)^{-2} \|\rho\|_G^n,$$

откуда в силу произвольного выбора  $\varepsilon > 0$  и  $\rho \in F(\Gamma_D)$  имеем  $M(\Gamma) \leq M(\Gamma_D) \leq M(\Gamma_D)$ . Неравенство  $M(\Gamma_D) \leq M(\Gamma)$  очевидно, и теорема, таким образом, доказана.

Пусть теперь  $L \subset [0, 1]$  — линейное канторово множество положительной длины и  $E = \underbrace{L \times L \times \dots \times L}_{(n-1) \text{ раз}}$ . Множество  $E$  имеет положительную

$(n-1)$ -ю меру Хаусдорфа. Покажем, что оно является NED-множеством в  $R^n$  в смысле определения Вайсяля (3). Возьмем  $F_1$  и  $F_2$  — непересекающиеся континуумы в  $R^n \setminus E$ , где предполагается, что множество  $E$  лежит

в гиперплоскости  $\{x_n=0\}$ . Пусть  $\Gamma$  — семейство спрямляемых кривых, соединяющих  $F_1$  с  $F_2$ , а  $\Gamma_0$  — семейство тех кривых из  $\Gamma$ , которые не пересекаются с  $E$ . Нам надо показать, что  $M(\Gamma) = M(\Gamma_0)$ . Возьмем какое-либо открытое множество  $D$  такое, что  $E \subset D \subset \bar{D} \subset R^n \setminus (F_1 \cup F_2)$ . В силу теоремы 1 достаточно показать, что  $M(\Gamma_D) \leq M(\Gamma_0)$ . Возьмем  $\rho(x) \in F(\Gamma_0)$ , для которой  $\int [\rho(x)]^n dx < \infty$ . Задав произвольно  $\varepsilon > 0$ , найдем  $(n-1)$ -мерное открытое множество  $U \subset \{x_n=0\}$  и  $\delta > 0$  такие, что  $E \subset U$ ,  $U \times [-\delta, \delta] \subset D$  и  $\int_{U \times [-\delta, \delta]} \rho^n dx < \varepsilon$ . Рассмотрим метрику

$$\rho^*(x) = \begin{cases} \rho(x), & \text{если } x \notin U \times (-\delta, \delta) \\ \infty, & \text{если } x \in \{x_n=0\}, \\ \rho(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) + \rho(x_1, \dots, x_{n-1}, -x_n), & \text{если } x \in U \times (-\delta, \delta). \end{cases}$$

Имеем  $\rho^* \in F(\Gamma_0)$  и  $\|\rho^*\|_{R^n}^n \leq \|\rho\|_{R^n}^n + O(\varepsilon)$ . Возьмем кривую  $\gamma \in \Gamma_D$ . В силу своей аналитичности на  $D$ , она либо содержит континуум, лежащий в гиперплоскости  $\{x_n=0\}$ , либо пересекается с  $E$  в конечном числе точек  $Q_1, Q_2, \dots, Q_m$ . В первом случае интеграл от  $\rho^*$  по  $\gamma$  бесконечен. Пусть этот интеграл конечен. Для каждой из точек  $Q_i$  можно построить куб  $T_i$ , симметричный относительно  $\{x_n=0\}$  и такой, что

- 1)  $\partial T_i \cap E = \emptyset$ ;
- 2)  $Q_i \in T_i \subset U \times (-\delta, \delta)$ ;
- 3)  $\int_{\gamma \cap T_i} \rho^* ds < \varepsilon/m$ ;
- 4)  $T_i \cap \gamma \cap \{x_n=0\} = \{Q_i\}$ ;
- 5)  $\int_{T_i} (\rho^*)^n dx \leq \varepsilon^n/m^n$ .

Дальнейшие рассуждения опираются на следующую лемму.

**Лемма 2.** Пусть  $T$  есть куб,

$$T = \{(x_1, \dots, x_n); |x_i| < 1/2, i=1, \dots, n\},$$

в котором задана метрика  $\rho^*(x)$ , симметричная относительно гиперплоскости  $\{x_n=0\}$  и суммируемая с  $n$ -й степенью. Пусть  $\gamma$  — спрямляемая кривая в  $T$ , концы которой лежат на  $\partial T \setminus \{x_n=0\}$ , и пересекающаяся с множеством  $T \cap \{x_n=0\}$  в единственной точке  $Q$ , которая разбивает  $\gamma$  на две связанные компоненты  $\gamma'$  и  $\gamma''$ .

Тогда найдется кривая  $\alpha$ , соединяющая  $\gamma'$  с  $\gamma''$  в  $\bar{T} \setminus (\{x_n=0\} \cap T)$ , для которой

$$\int_{\alpha} \rho^* ds < 2C \left\{ \int_T (\rho^*)^n dx \right\}^{1/n} + \int_{\gamma} \rho^* ds.$$

Воспользовавшись этой леммой, в каждом из кубов  $T_i$  построим указанную кривую  $\alpha_i$ , для которой  $\int_{\alpha_i} \rho^* ds \leq C \cdot \varepsilon/m$ . Континуум  $\gamma \cup (\cup_i \alpha_i)$  содержит некоторую кривую  $\gamma_1 \in \Gamma_0$  и, следовательно,

$$\int_{\gamma} \rho^* ds + \sum_{i=1}^m \int_{\alpha_i} \rho^* ds \geq 1,$$

откуда  $(1-C\varepsilon)\rho^* \in F(\Gamma_D)$ . Имеем

$$M(\Gamma_D) \leq (1-C\varepsilon)^{-n} (\|\rho\|^n + O(\varepsilon))$$

и в силу произвольного выбора  $\rho \in F(\Gamma_0)$  и  $\varepsilon > 0$  имеем неравенство  $M(\Gamma_D) \leq M(\Gamma_0)$ , откуда и следует, что  $E$  является NED-множеством.

В статье <sup>(3)</sup> Вяйсяля установлен, что всякое множество  $E \subset R^n$ , у которого  $\Lambda^{n-1}(E) = 0$ , является NED-множеством. Приведенный здесь пример NED-множества с  $\Lambda^{n-1} > 0$  является обобщением на пространственный случай аналогичного примера плоского множества класса  $N_D$ , имеющего положительную длину, который был построен в <sup>(4)</sup> Альфорсом и Берлингом.

Новосибирский государственный университет

Поступило  
20 XI 1973

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

<sup>1</sup> B. Fuglede, Acta Math., v. 98, № 3, 4 (1957). <sup>2</sup> B. B. Acees, ДАН, т. 200, № 3 (1971). <sup>3</sup> J. Väisälä, Ann. Acad. Sci. Fenn., Ser. A, 322 (1962). <sup>4</sup> L. Ahlfors, A. Beurling, Acta Math., v. 83 (1950).