Доклады Академии наук СССР
1973. Том 212, № 3

УДК 517.946/51 *МАТЕМАТИКА*

С. А. ТЕРСЕНОВ

ОБ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА, ВЫРОЖДАЮЩЕЙСЯ НА ГРАНИЦЕ

(Представлено академиком М. А. Лаврентьевым 25 I 1973)

Если квадратичная форма, соответствующая эллиптическому оператору $L(u)$, не меняет знака в области и коэффициенты достаточно гладкие, то в ([2], [3]) предложена и исследована первая краевая задача для параболического уравнения $L(u)=u_t$. В случае, если коэффициенты просто непрерывны или же квадратичная форма меняет знак в области, то краевая задача в указанной постановке некорректна. Примерами этого являются следующие уравнения $xu_{xx}+(1+2|\ln x|^{-1})u_x=u_t$ в области

$$xu_{xx}+(1+2)|\ln x|^{-1})u_x=u_t, \quad \text{в области } 0<x<1, \quad t>0,$$
$$xu_{xx}+\alpha u_x=u_t, \quad \alpha>1, \quad \text{в области} \quad |x|<1, \quad t>0.$$

Пусть основание цилиндра, где задано уравнение $L(u)=u_t$, содержит начало координат, и пусть только гиперплоскости $x_k=0$ являются поверхностями вырождения. Тогда, не нарушая по существу общность, при помощи отображения вместо одного уравнения можно рассматривать систему уравнений параболического типа в $\Omega=[G\times(0,1)]$, где G – область в n-мерном пространстве, ограниченная гиперплоскостями $x_k=0$, $k=1,\ldots,n$, и некоторой поверхностью σ, опирающейся на эти гиперплоскости, причем система будет вырождаться на гиперплоскостях $x_k=0$. Если $\Gamma=[\sigma\times(0,1)]$, то компоненты u_k решения можно задавать на Γ, а на многообразиях $x_k=0$, $0<t<1$, будут задаваться некоторые условия склеивания между определенными парами u_k и u_s.

Рассмотрим в Ω следующую параболическую систему уравнений:

$$\sum_{s=1}^{n}\left(x_s\frac{\partial^2 u_k}{\partial x_s^2}+\alpha_{ks}\frac{\partial u_k}{\partial x_s}\right)=b_k\frac{\partial u_k}{\partial t}, \tag{1}$$

$k=1,\ldots,m=2^n$, α_{ks} – постоянные, $b_k(x)$ – функции, сохраняющие знак в Ω. При данном индексе k обозначим через G нижнее основание Ω $(t=0)$, если $b_k>0$, и верхнее $(t=1)$, если $b_k<0$. Введем обозначения:

$$\psi_{ks}=u_k|_{x_s=0}, \qquad \varphi_{ks}=x_s^{\alpha_{ks}}\frac{\partial u_k}{\partial x_s}\Big|_{x_s=0}. \tag{2}$$

Рассмотрим следующие краевые задачи:

1) Пусть $0<\alpha_{ks}<1$, $1\leqslant k\leqslant m$, $1\leqslant s\leqslant n$. Ищется решение $u(u_1,\ldots,u_m)$ уравнения (1), для которого существуют (2), удовлетворяющее граничным условиям

$$u_k|_\Gamma=0, \qquad u_k|_G=f_k(x), \qquad k=1,2,\ldots,m, \tag{3}$$

и условиям склеивания

$$\psi_{2k-1,s}=\begin{cases}\psi_{2k+2s-2,s}, & 1\leqslant k\leqslant m/2-n+1, \quad 1\leqslant s\leqslant n,\\ \psi_{2k+2s-2,s}, & m/2-n+2\leqslant k\leqslant m/2, \quad 1\leqslant s\leqslant m/2-k+1,\\ \psi_{2k+2s-2-m,s}, & m/2-n+2\leqslant k\leqslant m/2, \quad m/2-k+2\leqslant s\leqslant n,\end{cases} \tag{4}$$

$$\omega_{2k-1,\,s},\quad \varphi_{2k-1,\,s}=$$

$$=\begin{cases} -\omega_{2k+2s-2,s}\,\varphi_{2k+2s-2,s}, & 1\leqslant k\leqslant m/2-n+1, \qquad 1\leqslant s\leqslant n,\\ -\omega_{2k+2s-2,s}\,\varphi_{2k+2s-2,s}, & m/2-n+2\leqslant k\leqslant m/2, \quad 1\leqslant s\leqslant m/2-k+1,\\ -\omega_{2k+2s-2-m,s}\,\varphi_{2k+2s-2-m,s}, & m/2-n+2\leqslant k\leqslant m/2, \quad m/2-k+2\leqslant s\leqslant n,\end{cases} \tag{5}$$

$$\omega_k=\prod_{s=1}^{n} x_s^{\alpha_{ks}-1},\qquad \omega_{ks}=\omega_k x_s^{1-\alpha_{ks}}.$$

2) Пусть все $\alpha_{ks}\geqslant 1$. Ищется ограниченное решение системы (1), удовлетворяющее граничным условиям

$$u_k|_G=f_k,\ k=1,\ldots,m,\quad u_{2k-1}|_\Gamma=0,\ k=1,\ldots,m/2, \tag{6}$$

и условиям склеивания (4) (см. выше).

Если (1) умножим на $\omega_k u_k$, проинтегрируем по области Ω, а потом сложим по k, то, учитывая однородные граничные условия (3) и (4), (5), нетрудно получить, что $u_k\equiv 0$, $k=1,\ldots,m$. Единственность можно доказать и по-другому. Для этого рассмотрим уравнение

$$\sum_{s=1}^{n}(x_s u_{x_s x_s}+\alpha_s u_{x_s})=bu_t,\qquad b>0. \tag{7}$$

Лемма 1. *Если $\alpha_i<1$ и решение u уравнения (7) в Ω достигает своего максимума во внутренней точке гиперплоскости $x_k=0$, $0<t<1$, то*

$$\lim_{x_k\to 0} x_k^{2\alpha_k-1}[u(x,t_0)-u(x^0,t_0)]<0. \tag{8}$$

Лемма 2. *Пусть $\alpha_i<1$, $i=1,2,\ldots,r$, и решение u уравнения (7) достигает максимума в точке (x^0,t_0), лежащей на пересечении гиперплоскостей $x_i=0$, $i=1,\ldots,r$, $0<t<1$. Пусть существует такая окрестность точки (x^0,t_0): $0\leqslant x_i\leqslant\delta$, $i\leqslant r$, $|x_i-x_i^0|\leqslant\delta$, $i\geqslant r+1$, $|t-t_0|<\delta$, что в этой окрестности $u(x^0,t_0)>u(x,t)$, $(x^0,t_0)=(x,t)$. Тогда*

$$\lim_{x^*\to x^0}\prod_{s=1}^{r} x_s^{\alpha_s-1}[u(x^*,t_0)-u(x^0,t_0)]<0, \tag{9}$$

где x^* — точка, у которой $x_i=x_i^0$, $i\geqslant r+1$.

Лемма 3. *Пусть $\alpha_s\geqslant 1$, $s=1,\ldots,n$. Если u — ограниченное решение (7), равное нулю на гиперплоскостях $x_k=0$, $0<t<1$, $k=1,\ldots,n$, и на нижнем основании, или же u равно нулю на Γ и на нижнем основании, то $u\equiv 0$ в Ω.*

Для доказательства нужно построить так называемую барьерную функцию, которая строится, используя формулы: если $\omega(x,t)$ — решение уравнения (7) при $\alpha_s={}^1/_2$, $s=1,\ldots,n$, удовлетворяющее условиям $\sqrt{x_s}\,\omega_{x_s}=0$ при $x_s=0$, $s=1,\ldots,n$, то функции

$$u=\prod_{s=1}^{n}\prod_{k=1}^{q_s}\left(x_s\frac{\partial}{\partial x_s}+\alpha_s+k-1\right)\times$$

$$\times\int_0^1\ldots\int_0^1 \omega(x_1\tau_1,\ldots,x_n\tau_n,t)\prod_{s=1}^{} \tau_s^{-1/2}(1-\tau_s)^{q_s+\alpha_s-3/2}\,d\tau_1\,d\tau_n, \tag{10}$$

$$v=\prod_{s=1}^{n} x_s^{1-\alpha_s}\int_0^1\ldots\int_0^1 \omega(x_1\tau_1,\ldots,x_n\tau_n,t)\prod_{s=1}^{n}\tau_s^{-1/2}(1-\tau_s)^{1/2-\alpha_s}\,d\tau_1\,d\tau_n$$

будут решениями уравнения (7) ($b=1$) при произвольных $\alpha_s<1$, $s=1,\ldots,n$, $q_s\geqslant 0$ — наименьшее целое число, удовлетворяющее условиям $q_s+\alpha_s>{}^1/_2$, $s=1,\ldots,n$. В случае $n=1$ и $\alpha>{}^1/_2$ первая из этих формул приведена в [4].

Существование решения рассматривается для случая, когда $b_s=1$ или же $b_s=(-1)^{s+1}$, а в качестве области G принимается единичный куб. Задача (1)–(5) сводится к разрешимости некоторой системы интегральных, вообще говоря, сингулярных, уравнений относительно $\varphi_{2k-1,\,s}$. Приведем их для случаев $n=2$, $n=1$.

а) $n=2$, $0<\alpha_s=\alpha<1$, $b_s=(-1)^{s+1}$.

$$\int_0^t dz\int_0^1 K_1(x,\xi,t-z)\,\Phi_1(\xi,z)\,d\xi+\int_t^1 dz\int_0^1 K_2(x,\xi,t-z)\,\Phi_2(\xi,z)\,d\xi=F(x,t), \tag{11}$$

$$K_1=\begin{pmatrix} M_1 & M_2 & 0 & 0\\ M_2 & M_1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & M_1 & M_2\\ 0 & 0 & M_2 & M_1\end{pmatrix},\quad K_2=\begin{pmatrix} M_1 & M_2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & M_2 & M_1\\ 0 & 0 & M_1 & M_2\\ M_2 & M_1 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

$$\Phi_1=(\varphi_{11},\ \varphi_{12},\ \varphi_{31},\ \varphi_{32}),\qquad \Phi_2=(\varphi_{11},\ \varphi_{32},\ \varphi_{31},\ \varphi_{12}).$$

$$M_1=\frac{\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(\alpha)}\left(\frac{x}{\xi}\right)^{(1-\alpha)/2}\sum_{n,m=1}^{\infty}b_{mn}e^{-{}^1\!/_4(\lambda_n^2+\lambda_m^2)(t-z)}\,\frac{\lambda_n^2+\lambda_m^2}{4^\alpha(\lambda_n\lambda_m)^{1-\alpha}}\times$$
$$\times\frac{J_{\alpha-1}(\lambda_n\sqrt{\xi})\,J_{\alpha-1}(\lambda_n\sqrt{x})}{J_\alpha^2(\lambda_n)},$$

$$M_2=\frac{\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(\alpha)}\left(\frac{x}{\xi}\right)^{(1-\alpha)/2}\sum_{n,m=1}^{\infty}b_{mn}\,e^{-{}^1\!/_4(\lambda_n^2+\lambda_m^2)(t-z)}\,\frac{\lambda_n^2+\lambda_m^2}{4^\alpha(\lambda_n)^{2(1-\alpha)}}\times$$
$$\times\frac{J_{\alpha-1}(\lambda_n\sqrt{\xi})\,J_{\alpha-1}(\lambda_m\sqrt{x})}{J_\alpha^2(\lambda_n)}.$$

$$b_{mn}=\int_0^1\frac{J_{\alpha-1}(\lambda_m\sqrt{\xi})\,[I_{1-\alpha}(\lambda_n\sqrt{\xi})I_{\alpha-1}(\lambda_m)-I_{\alpha-1}(\lambda_n\sqrt{\xi})I_{1-\alpha}(\lambda_n)]}{J_\alpha^2(\lambda_m)\,I_{\alpha-1}(\lambda_n)}\,d\xi,$$

$\lambda_n>0$, $J_{\alpha-1}(\lambda_n)=0$, $I_\nu(x)$ – функция Бесселя. Обращение уравнения

$$\int_0^t dz\int_0^1 M(x,\xi,t-z)\,\Phi(\xi,z)\,d\xi=\Psi(x,t) \tag{12}$$

дается формулой

$$\Phi(x,t)=\frac{d}{dt}\int_0^t dz\int_0^1 N(x,\xi,t-z)\,\Psi(\xi,z)\,d\xi, \tag{13}$$

$$M=\begin{pmatrix} M_1 & M_2\\ M_2 & M_1\end{pmatrix},\quad N=\begin{pmatrix} N_1 & N_2\\ N_2 & N_1\end{pmatrix},$$

$$N_1=-\frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(1-\alpha)}\left(\frac{x}{\xi}\right)^{(1-\alpha)/2}\Bigg(\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\mu_n}{2}\right)^{2(1-\alpha)}\frac{I_{\alpha-1}(\mu_n)}{I_{1-\alpha}(\mu_n)}\times$$
$$\times\frac{J_{1-\alpha}(\mu_n\sqrt{\xi})\,J_{1-\alpha}(\mu_n\sqrt{x})}{J_{2-\alpha}^2(\mu_n)}+\sum_{n,m=1}^{\infty}a_{mn}e^{-(\mu_n^2+\mu_m^2)/4}(t-z)\times$$
$$\times\left(\frac{\mu_n\mu_m}{4}\right)^{1-\alpha}\frac{J_{1-\alpha}(\mu_n\sqrt{x})\,J_{1-\alpha}(\mu_n\sqrt{\xi})}{J_{2-\alpha}^2(\mu_n)}\Bigg)$$

$$N_2 = \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(1-\alpha)} \left(\frac{x}{\xi}\right)^{(1-\alpha)/2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\mu_n}{2}\right)^{2(1-\alpha)} \times \right.$$

$$\times \frac{J_{1-\alpha}(\mu_n \sqrt{\xi}) [I_{\alpha-1}(\mu_n \sqrt{x}) I_{1-\alpha}(\mu_n) - I_{1-\alpha}(\mu_n \sqrt{x}) I_{\alpha-1}(\mu_n)]}{J^2_{2-\alpha}(\mu_n) I_{1-\alpha}(\mu_n)} -$$

$$\left. - \sum_{m,n=1}^{\infty} a_{mn} e^{-(\mu_n^2+\mu_m^2)(t-z)/4} \left(\frac{\mu_n}{2}\right)^{2(1-\alpha)} \frac{J_{1-\alpha}(\mu_n \sqrt{\xi}) J_{1-\alpha}(\mu_m \sqrt{x})}{J^2_{2-\alpha}(\mu_n)} \right),$$

$$a_{mn} = \int_0^1 \frac{J_{1-\alpha}(\mu_m \sqrt{\xi}) [I_{\alpha-1}(\mu_n \sqrt{\xi}) I_{1-\alpha}(\mu_n) - I_{1-\alpha}(\mu_n \sqrt{\xi}) I_{\alpha-1}(\mu_n)]}{J^2_{2-\alpha}(\mu_m) I_{1-\alpha}(\mu_n)} d\xi,$$

$$\mu_n > 0, \quad J_{1-\alpha}(\mu_n) = 0.$$

Частично обращая при помощи формулы (13) уравнение (11) с ядром K_1, сводим ее к системе интегральных уравнений, ядро которой относительно t будет сингулярным. Более четко сингулярность видна в случае $n=1$.

б) $n=1$, $\alpha_1 \geqslant \alpha_2$. Если $b_s=1$, то

$$\int_0^t \{K_1(t-z) + K_2(t-z)\} \varphi(z)\, dz = \gamma(t), \tag{14}$$

если же $b_s = (-1)^{s+1}$, то

$$\int_0^t K_1(t-z) \varphi(z)\, dz + \int_t^1 K_2(z-t) \varphi(z)\, dz = \gamma(t), \tag{15}$$

$$K_s(t) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{1}{4}\lambda_{sn}^2 t} \frac{2^{2(1-\alpha_s)} \lambda_{sn}^{2(\alpha_s-1)}}{\Gamma^2(\alpha_s) J^2_{\alpha_s}(\lambda_{sn})}, \quad J_{\alpha_s-1}(\lambda_{sn}) = 0.$$

Обращение уравнения $\int_0^t K_s(t-z) \varphi(z)\, dz = \gamma(t)$ дается формулой

$$\varphi(t) = \frac{d}{dt} \int_0^t K_s^*(t-z) \gamma(z)\, dz, \tag{16}$$

$$K^*(t) = 1 - \alpha_s + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-(\mu_{sn}^2/4)t} \frac{2^{2\alpha_s} \mu_{sn}^{-2\alpha}}{\Gamma^2(1-\alpha_s) J^2_{2-\alpha_s}(\mu_n)}, \quad J_{1-\alpha_s}(\mu_n) = 0.$$

На основании асимптотического поведения функций Бесселя и их корней $K_s(t) = t^{-\alpha_s} B_s(t)$, $K_s^*(t) = t^{\alpha_s-1} B_s^*(t)$, где B_s и B_s^* — непрерывные при $t \geqslant 0$ функции.

В случае $\alpha_1 > \alpha_2$ при помощи (16) уравнения (14) и (15) сводятся к интегральным уравнениям со слабой особенностью, разрешимость которых следует из единственности, а в случае $\alpha_1 = \alpha_2$ уравнение (14) решается формулой (16), а уравнение (15) сводится к сингулярному уравнению, разрешимость которого следует тоже из единственности. Задача 2) решается в явном виде. Единственность доказывается способом, указанным в [1].

Новосибирский государственный университет

Поступило 11 I 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] М. В. Келдыш, ДАН, 77, № 2, 181 (1951). [2] G. Fichera, Atti Accad. naz. Lincei Mem. Cl. sci. fis. mat. e natur. ser. 1, 5, № 1 (1965). [3] О. А. Олейник, Е. В. Радкевич, Матем. анализ. Итоги науки, 1969. [4] D. Colton, J. dif. equat., 8, № 2, 250 (1970).