Доклады Академии наук СССР
1973. Том 212, № 3

УДК 519.1 *МАТЕМАТИКА*

Г. Ш. ФРИДМАН

О РАДИАЛЬНО-КРИТИЧЕСКИХ ОРИЕНТИРОВАННЫХ ГРАФАХ

(Представлено академиком М. А. Лаврентьевым 22 I 1973)

На множестве вершин конечного ориентированного 1-графа (орграфа) без петель $G=(X;\ U)$ введем функционал расстояния $\rho(x,\ y)$ следующим образом: $\rho(x,\ x)=0$, $\rho(x,\ y)$ равно наименьшему числу дуг в ориентированном пути из x в y, если вершина y достижима из x, в противном случае полагаем $\rho(x,\ y)=\infty$. Кроме того, введем функционал $\rho_m(x,\ y)$ следующим образом:

$$\rho_m(x,\ y)=\min\{\rho(x,\ y),\ \rho(y,\ x)\}.$$

Назовем радиусом орграфа $G=(X;\ U)$ величину

$$r(G)=\min_{x\in X}\max_{y\in X}\rho(x,\ y),$$

а квазирадиусом — величину

$$r_m(G)=\min_{x\in X}\max_{y\in X}\rho_m(x,\ y).$$

Назовем орграф $G=(X;\ U)$, имеющий k бикомпонент, радиально-критическим (квазирадиально-критическим), если добавление произвольной отсутствующей в нем дуги приводит либо к уменьшению числа бикомпонент, либо к уменьшению радиуса (квазирадиуса).

Диаметрально-критические графы изучались в работах ([2, 6, 7]). В работе ([3]) найдена точная верхняя оценка числа ребер в n-вершинном обыкновенном неориентированном графе с данным конечным радиусом, а в ([4, 5]) — верхние оценки числа дуг в орграфах из следующих классов:

1) n-вершинные 1-графы без петель, имеющие k бикомпонент и бесконечный радиус, 2) n-вершинные 1-графы без петель, имеющие k бикомпонент, данный конечный радиус r и такие, что каждая бикомпонента есть полный симметрический граф.

В этой заметке мы с точностью до изоморфизма опишем радиально-критические орграфы с бесконечным радиусом, квазирадиально-критические орграфы с бесконечным квазирадиусом, а кроме того, получим точную верхнюю оценку числа дуг в n-вершинном орграфе, имеющем данный конечный радиус r.

1. Пусть $G=(X;\ U)$ — радиально-критический орграф и $r(G)=\infty$. Легко видеть при этом, что G — транзитный граф и каждая бикомпонента графа G есть полный симметрический граф. Из сказанного следует, что радиально-критический орграф бесконечного радиуса однозначно, с точностью до числа вершин в каждой бикомпоненте, восстанавливается по своему графу Герца. Следовательно, мы можем заниматься изучением только графов Герца радиально-критических орграфов бесконечного радиуса.

Обозначим через $\Gamma_k=(X_k;\ U_k)$ такой орграф, что $X_k=\{1,\ \ldots,\ k\}$ и $(i,\ j)\in U_k\Leftrightarrow i<j$. Орграф, изоморфный Γ_k, будем называть транзитивным турниром. Через $\Gamma_{k,1}=(X_{k,1};\ U_{k,1})$ обозначим такой орграф, что $X_{k,1}=\{1,\ \ldots,\ k\}$, а $(i,\ j)\in U_{k,1}\Leftrightarrow(i<j)\,\&\,(j\neq 2)$.

Теорема 1. *Пусть* $\Gamma=(Y;\ V)$ — *граф Герца радиально-критического орграфа* G, *имеющего* k *бикомпонент и* $r(G)=\infty$. *Тогда граф* Γ *изоморфен графу* $\Gamma_{k,1}$.

Доказательство этой теоремы несложно. В несколько ином виде она фактически содержится в ([4]).

2. Теперь займемся изучением квазирадиально-критических орграфов с бесконечным квазирадиусом. Так же, как и в п. 1, легко убедиться в том, что для этого достаточно изучить строение соответствующих графов Герца.

Через $\Gamma_{k,0}=(X_{k,0};\ U_{k,0})$ обозначим такой орграф, что $X_{k,0}=\{1,\ldots,k\}$ и $(i,\ j)\in U_{k,0}\Leftrightarrow(i<j)\&(i\neq 1)$. Обозначим через $\Gamma_{k,s;k_1,\ldots,k_s}$ k-вершинный орграф, множество вершин которого разбито на s непересекающихся классов $Y_1,\ldots,Y_s$, $|Y_\alpha|=k_\alpha\geqslant 2$, $\alpha=1,\ldots,s$: подграф, порожденный множеством Y_α, изоморфен $\Gamma_{k_\alpha,0}$, и, кроме того, если $\alpha_1<\alpha_2$, то из каждой вершины класса Y_{α_1} в каждую вершину класса Y_{α_2} идет дуга; других дуг в орграфе $\Gamma_{k,s;k_1,\ldots,k_s}$ не имеется.

Теорема 2. *Граф Герца квазирадиально-критического орграфа* D, *имеющего* k *бикомпонент и* $r_m(D)=\infty$, *изоморфен графу* $\Gamma_{k,s;k_1,\ldots,k_s}$ *при некотором* s, $1\leqslant s\leqslant[k/2]$, *и некоторых* $k_1,\ldots,k_s$.

Доказательство теоремы 2 следует из приводимых ниже лемм.

Лемма 1. *Пусть граф* Γ *является графом Герца квазирадиально-критического орграфа, имеющего* k *бикомпонент и* $r_m=\infty$. *Пусть, кроме того, граф* Γ *не является слабо связным. Тогда граф* Γ *изоморфен графу* $\Gamma_{k,0}$.

Лемма 2. *Пусть* Γ — *граф Герца квазирадиально-критического орграфа с* $r_m=\infty$. *Пусть каждая вершина графа* Γ *имеет либо полустепень исхода, либо полустепень захода, равную нулю. Тогда граф* Γ *изоморфен графу* $D_4=(X_4;\ W_4)$, *где* $X_4=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$ *и* $W_4=\{(1,\ 3),\ (1,\ 4),\ (2,\ 3),\ (2,\ 4)\}$.

Пусть теперь Γ — граф Герца квазирадиально-критического орграфа с бесконечным квазирадиусом. Пусть Γ — слабо связный и содержит такую вершину v, что и полустепень захода, и полустепень исхода этой вершины больше нуля. Множество вершин графа Γ разобьем на следующие непересекающиеся непустые подмножества: A_v — совокупность вершин, из которых достижима вершина v; B_v — совокупность вершин, достижимых из v; $\{v\}$; C_v — все прочие вершины. Через $\Gamma(A_v)$, $\Gamma(B_v)$ и $\Gamma(C_v)$ обозначим подграфы графа Γ, порожденные множествами A_v, B_v и C_v соответственно.

Лемма 3. *Пусть* $r_m(\Gamma(A_v))=r_m(\Gamma(B_v))=\infty$ *и* $|C_v|=t$. *Тогда*:

1) *из каждой вершины множества* A_v *в каждую вершину множества* C_v *идет дуга, из каждой вершины множества* C_v *в каждую вершину множества* B_v *идет дуга*;

2) *граф* $\Gamma(C_v)$ *изоморфен графу* Γ_t;

3) *графы* $\Gamma(A_v)$ *и* $\Gamma(B_v)$ *квазирадиально-критические.*

Лемма 4. *Пусть* $\min\{r_m(\Gamma(A_v)),\ r_m(\Gamma(B_v))\}<\infty$. *Тогда* $|C_v|=1$.

Лемма 5. *Пусть* $\min\{r_m(\Gamma(A_v));\ r_m(\Gamma(B_v))\}<\infty$, $C_v=\{y\}$. *Тогда граф* Γ *удовлетворяет одному из перечисленных ниже условий*:

1) $A_y\neq\phi$, $B_y\neq\phi$, $r_m(A_y)=r_m(B_y)=\infty$, *и граф* Γ *имеет вид, указанный в лемме* 3;

2) $A_y=\phi$, $B_y=\phi$, $r_m(B_y)=\infty$, *подграф* $\Gamma(B_y)$ *квазирадиально-критический, подграф* $\Gamma(C_y)$ — *транзитивный турнир, и из каждой вершины множества* C_y *в каждую вершину множества* B_y *идет дуга*;

3) $A_y\neq\phi$, $B_y=\phi$, $r_m(A_y)=\infty$, *подграф* $\Gamma(A_y)$ — *квазирадиально-критический, подграф* $\Gamma(C_y)$ — *транзитивный турнир, и из каждой вершины множества* A_y *в каждую вершину множества* C_y *идет дуга.*

Лемма 6. *Пусть* Γ — *граф Герца слабо связного квазирадиально-критического орграфа с* $r_m=\infty$. *Тогда множество вершин графа* Γ *можно разбить на два подмножества так, что*:

а) *подграфы, порожденные каждым из этих подмножеств, — квазирадиально-критические с* $r_m=\infty$;

б) *из каждой вершины первого подмножества в каждую вершину второго подмножества идет дуга.*

Приведем некоторые следствия из теоремы 2.

Следствие 1. *Если в n-вершинном орграфе G, имеющем k бикомпонент, число дуг больше, чем $n(n-k-1)+k^2/2$, то $r_m(G)<\infty$.*

Следствие 2. *Если орграф G, имеющий k бикомпонент и $r_m(G)=\infty$, обладает тем свойством, что добавление произвольной отсутствующей в нем дуги превращает его в орграф с конечным квазирадиусом, то:* а) $k=2l$, б) *граф Герца орграфа G изоморфен $\Gamma_{k,\,k/2;\,2,\,\ldots,\,2}$.*

Следствие 3. *Число неизоморфных n-вершинных квазирадиально-критических орграфов, имеющих k бикомпонент и $r_m=\infty$, равно*

$$\sum_{l=1}^{[k/2]}\sum_{s=(3l-k)_+}^{l}\sum_{t=2s}^{n-k+2s}\sum_{r_1+\ldots+r_s=t}\binom{l}{s}\binom{k-2l-1}{l-s-1}\binom{n-t-1}{k-2s-1}\left\{\prod_{i=1}^{s}\left[\frac{r_i}{2}\right]\right\}.$$

Следствие 4. *Число различных квазирадиально-критических орграфов, имеющих k бикомпонент и $r_m=\infty$, которые можно построить на n нумерованных вершинах, равно*

$$\sum_{l=1}^{[k/2]}\sum_{s=(3l-k)_+}^{l}\sum_{t=2s}^{n-k+2s}\sum_{r_1+\ldots+r_s=t}\binom{l}{s}\binom{k-2l-1}{l-s-1}\binom{n}{n-t}(k-2s)!\times$$

$$\times S(n-t,\,k-2s)\frac{t!}{r_1!\ldots r_s!}\left\{\prod_{i=1}^{s}(2^{r_i-1}-1)\right\},$$

где $S(u,v)$ — числа Стирлинга второго рода.

Аналогичные следствия можно получить и из теоремы 1.

3. Назовем n-вершинный орграф G, имеющий радиус k, максимальным, если он имеет наибольшее число дуг среди всех n-вершинных орграфов радиуса k. Пусть $\varphi(n,k)$ — число дуг в максимальном n-вершинном орграфе радиуса $k<\infty$.

Теорема 3. $\varphi(n,k)=n(n-k)+(k^2-k-2)/2$, $k\geqslant 2$.

Обозначим для краткости $g(n,k)=n(n-k)+(k^2-k-2)/2$.

Пусть $G=(X;\,U)$ — максимальный n-вершинный орграф радиуса k, x_1 — та его вершина, для которой $\max\limits_{y\in X}\rho(x_1,y)=k$, A_1 — бикомпонента, содержащая вершину x_1. Пусть $\{(x_1,x_2),(x_2,x_3),\ldots,(x_k,x_{k+1})\}$ — кратчайший ориентированный путь из x_1 в x_{k+1}, в котором вершины $x_1,\ldots,x_t$ принадлежат бикомпоненте A_1, а прочие вершины ей не принадлежат. Предположим, что кроме названных бикомпонента A_1 содержит еще s вершин. Доказательство неравенства $\varphi(n,k)\leqslant g(n,k)$ вытекает из следующих лемм.

Лемма 7.

$$\varphi(n,k)\leqslant g(n,k)+\{(n-k-s-1)\max\{t,3\}+s\max\{k,t+2\}+$$
$$+s^2+ts+t^2+3k+2-n(s+t+2)\}.$$

Лемма 8. *Если $x\in A_1$, то полустепень исхода вершины x не превосходит $n-k$.*

Для доказательства неравенства $\varphi(n,k)\geqslant g(n,k)$ рассмотрим орграф F, который имеет следующую структуру: вершины его суть $x_1,\ldots,x_n$; подграф, порожденный вершинами $\{x_{k+2},\ldots,x_n\}$, полный симметрический, из вершины x_1 дуги идут в вершину x_j, где $(j=2)\vee(j\geqslant k+2)$; из вершины x_i, $1<i\leqslant k+1$, дуги идут в вершины x_j, где $(1<j<i)\vee(j=i+1)\vee(j\geqslant k+2)$; из каждой вершины x_i, $i\geqslant k+2$, в каждую из вершин x_2, x_3 идет дуга; других дуг в орграфе F не имеется. Легко видеть, что радиус орграфа F равен k, а число дуг в нем равно $g(n,k)$.

Из доказательства теоремы 3 легко извлекается описание всех максимальных орграфов конечного радиуса. Именно, справедливо следующее

П р е д л о ж е н и е 1. *Все n-вершинные максимальные орграфы D конечного радиуса k исчерпываются следующими:*

а) *если $k=1$, то D — полный симметрический орграф;*

б) *если $k=2$, то максимальными являются все те n-вершинные орграфы, у которых полустепень исхода каждой вершины равна $n-2$;*

в) *при $k\geqslant 3$ множество вершин графа D можно разбить на $k+1$ непересекающихся подмножеств $A_1, \ldots, A_{k+1}$, так что все эти подмножества, за исключением, может быть, двух, имеющих соседние номера, одноэлементные; A_1, A_{k+1} одноэлементные; подграф, порожденный каждым из этих подмножеств, полный симметрический; из каждой вершины множества A_i в каждую вершину множества A_{i+1} идет дуга, $i=1, \ldots, k$; если $1<l<j\leqslant k+1$, то из каждой вершины множества A_j в каждую вершину множества A_l идет дуга; других дуг, кроме перечисленных выше, в орграфе D не имеется.*

С л е д с т в и е 1. *При $k\geqslant 3$ число неизоморфных n-вершинных максимальных орграфов равно $(k-2)(n-k-1)+1$.*

С л е д с т в и е 2. *Число различных максимальных орграфов, которые можно построить на данных n нумерованных вершинах, равно*

$$\eta(n, k) = \begin{cases} (n-1)^n, & k=2, \\ \dfrac{n!\,(k-1)}{(n-k)!} + \dfrac{n!\,(k-2)}{(n-k+1)!}\cdot(2^{n-k+1}-2n+2k-4), & k\geqslant 3. \end{cases}$$

Примечание при корректуре. После того, как статья была сдана в печать, Л. С. Мельников сообщил автору, что теорема 3 приведена в работе Ш. М. Исмаилова ([8]). Однако в ее доказательстве в ([8]) имеются значительные неясности.

Институт гидродинамики
Сибирского отделения Академии наук СССР
Новосибирск

Поступило
11 I 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. А. З ы к о в, Теория конечных графов, 1, Новосибирск, 1969. [2] O. O r e, J. Combinatorial Theory, 5, № 1 (1968). [3] В. Г. В и з и н г, ДАН, 173, № 6 (1967). [4] Ш. М. И с м а и л о в, Сборн. Управляемые системы, в. 4—5, Новосибирск, 1970. [5] Ш. М. И с м а и л о в, Докл. АН АзербССР, 27, № 2 (1971). [6] Л. С. М е л ь н и к о в, Сборн. Управляемые системы, в. 7, Новосибирск, 1970. [7] Г. Ш. Ф р и д м а н, Сборн. О некоторых вопросах теоретической кибернетики и алгоритмах программирования, Новосибирск, 1971. [8] Ш. М. И с м а и л о в, Деп. ВИНИТИ, № 3245—71, 1971.