Доклады Академии наук СССР
1974. Том 216, № 4

УДК 517 *МАТЕМАТИКА*

М. Г. ВИТКОВ

ЧЕБЫШЕВСКИЕ АППРОКСИМАЦИИ ТАНГЕНСА

(Представлено академиком С. М. Никольским 11 XI 1973)

В нашей работе рассчитаны и табулированы коэффициенты чебышевских аппроксимаций функции tg (x) полиномами различного типа: A, B и C (табл. 1). Полиномы A и B — нечетные:

$$P_n(x)=p_1x+p_2x^3+\ldots+p_nx^{2n-1}.$$

Полиномы A обеспечивают в интервале аппроксимации $x\in[0,\pi/4]$ в $n+1$ точках чебышевского альтернанса достижения максимального модуля уклонения $M=\max|P_n(x)-\mathrm{tg}\,(x)|$. Полиномы B дополнительно обеспечивают нулевое уклонение от аппроксимируемой функции в конце $x_\text{г}=\pi/4$ интервала аппроксимации, их множество точек альтернанса меньше на единицу. Полиномы C содержат в интервале аппроксимации $[0,\,x_\text{г}=\pi/4]$ $n+1$ точку альтернанса и имеют вид

$$P_n(x)=p_1x+p_2x^2+\ldots+px_n{}^n.$$

Для сравнения в табл. 1 приведены значения $M_\text{Т}$ модуля наибольшего уклонения в рассматриваемой области аппроксимации тэйлоровской аппроксимации тангенса около $x=0$ нечетным полиномом соответствующей степени n.

Для расчета чебышевских аппроксимаций в нашей работе разработан метод последовательных приближений, являющийся разновидностью метода последовательных интерполяций. В исходном приближении n последовательных узлов интерполяции $x_1, x_2, \ldots, x_n$ располагались на интервале аппроксимации $[x_0=0,\,x_\text{г}=\pi/4]$ равномерно. Для полиномов B последний узел интерполяции совпадает с концом интервала $(x_n=x_\text{г})$, для полиномов A и C, когда узлы интерполяции все внутри интервала, занумерован конец интервала $x_\text{г}=x_{n+1}$.

Таблица 1

Тип	A	B	C
	$n=1,\ M_\text{Т}=0{,}2_1$		
M	$5{,}_8\cdot10^{-2}$	$9{,}_0\cdot10^{-2}$	$5{,}_8\cdot10^{-2}$
p_1	$1{,}1998_5$	$1{,}2732_4$	$1{,}1998_5$
	$n=2,\ M_\text{Т}=5{,}_3\cdot10^{-2}$		
M	$4{,}_1\cdot10^{-3}$	$5{,}_3\cdot10^{-3}$	$1{,}_3\cdot10^{-2}$
p_1	$0{,}97540_6$	$0{,}96931_3$	$0{,}84965_9$
p_2	$0{,}47442_1$	$0{,}49270_7$	$0{,}51845_7$
	$n=3,\ M_\text{Т}=1{,}_3\cdot10^{-2}$		
M	$2{,}_9\cdot10^{-4}$	$3{,}_5\cdot10^{-4}$	$1{,}_7\cdot10^{-3}$
p_1	$1{,}0025_3$	$1{,}0029_9$	$1{,}0358_2$
p_2	$0{,}30326_8$	$0{,}29945_2$	$-0{,}22408_2$
p_3	$0{,}21884$[illegible]	$0{,}22477$[illegible]	$0{,}66662$[illegible]
	$n=4,\ M_\text{Т}=3{,}_3\cdot10^{-3}$		
M	$2{,}_1\cdot10^{-5}$	$2{,}_4\cdot10^{-5}$	$3{,}_2\cdot10^{-4}$
p_1	$0{,}999764_2$	$0{,}999729_6$	$0{,}98849_8$
p_2	$0{,}338100_3$	$0{,}338639_4$	$0{,}12597_4$
p_3	$0{,}107746_8$	$0{,}105716_8$	$-0{,}079995_8$
p_4	$0{,}101797_5$	$0{,}103932_5$	$0{,}48454_5$
	$n=5,\ M_\text{Т}=8{,}_3\cdot10^{-4}$		
M	$1{,}_5\cdot10^{-6}$	$1{,}_7\cdot10^{-6}$	$5{,}_1\cdot10^{-5}$
p_1	$1{,}000020_8$	$1{,}000023_4$	$1{,}00253_5$
p_2	$0{,}3326936_3$	$0{,}3326299_5$	$-0{,}0411627_6$
p_3	$0{,}1387888_5$	$0{,}1392111_0$	$0{,}544254_8$
p_4	$0{,}3545987_9$	$0{,}3443989_1$	$-0{,}440655_1$
p_5	$0{,}04739458_1$	$0{,}04820541_4$	$0{,}474979_8$

В узлах интерполяции x_k, $k=1, 2, \ldots, n$, некоторого приближения аппроксимируемая и аппроксимирующая функции совпадают, что дает n уравнений вида

$$\operatorname{tg}(x_k)=P_n(x_k)=P_n(p_1, p_2, \ldots, p_n, x_k)$$

для определения n параметров p_k рассматриваемого приближения аппроксимации.

В интервалах интерполяции (x_{k-1}, x_k) при $k=1, 2, \ldots, n$ (а для полиномов A и C также при $k=n+1$) уклонения аппроксимируемой и аппроксимирующей функций достигают своих наибольших в каждом интервале значений y_k, знак которых меняется для соседних интервалов. Для выравнивания всех модулей наибольших уклонений интервалов интерполяции $M_k=|y_k|$, характерного для чебышевской аппроксимации, узлы интерполяции новых приближений располагаются с большей плотностью в тех областях x, где наблюдались большие модули уклонения M_k.

То, что при последовательных приближениях происходит не непосредственный сдвиг узлов интерполяции данных номеров, а изменяется плотность их расстановки в определенных областях x, является основным отличием разработанного расчетного метода.

Для конкретности в дальнейшем рассмотрены случаи полиномов A и C. Обозначаем: $M=\max M_k$ и $\mathbf{m}=\min M_k$, $k=1, 2, \ldots, n+1$. Вычисляем $n+2$ вспомогательных значения:

$$X_0=0, \quad X_k=\frac{x_k+D\sum_{m=1}^{k}\left[(x_m-x_{m-1})(M_m/M)^{1/2}\right]}{1+\dfrac{D}{x_{\text{г}}}\sum_{m=1}^{n+1}\left[(x_m-x_{m-1})(M_m/M)^{1/2}\right]}, \quad k=1, 2, \ldots, n+1.$$

Входящий в формулу параметр D регулирует интенсивность передвижки узлов интерполяции при переходе к новому приближению, его исходное значение $D=1$.

Для расчета нового положения x_k' узла интерполяции следующего приближения с выбранным номером k вначале находим номер m из условия

$$X_{m-1}\leqslant x_k<X_m.$$

После этого новое значение рассчитывается как

$$x_k'=x_{m-1}+\frac{(x_m-x_{m-1})(x_k-X_{m-1})}{X_m-X_{m-1}}.$$

Второй особенностью разработанного алгоритма является сохранение в памяти новых и старых значений узлов интерполяции x_k' и x_k. После определения параметров p_k' нового приближения и соответствующих новых модулей M_k' переход к новой расстановке узлов интерполяции завершается только при выполнении условия $M'/\mathbf{m}'<M/\mathbf{m}$. В противном случае, в качестве исходных узлов интерполяции снова рассматриваются старые значения x_k, а переход к новым значениям x_k' производится после предварительного уменьшения параметра D каждый раз в 10 раз.

Разработанный алгоритм отличается от известных [1-3] особенной простотой, что позволило реализовать его на малой ЭВМ серии «МИР-1». Все расчеты проводились с разрядностью 10. Расчет полиномов A и B завершался после достижения равноволновости уклонения аппроксимации с точностью лучше 0,01, а полиномов C — с точностью лучше 0,1 ($M/\mathbf{m}<1{,}01$ или 1,1 соответственно). Сходимость наблюдалась за несколько шагов последовательных интерполяций.

Из рассчитанных чебышевских аппроксимаций $\operatorname{tg}(x)$ наибольшую точность при заданной степени аппроксимации обеспечивают разложения типа A, точности которых, как и следовало ожидать, абсолютно совпадают с точностями родственных аппроксимаций функции $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}x\right)$ в таблицах номеров 4220—23 из [3]. Приблизительно такие же точности для степеней $n \geqslant 4$ у аппроксимаций типа B.

Всесоюзный заочный
электротехнический институт связи
Москва

Поступило
30 X 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *Е. Я. Ремез*, Общие вычислительные методы чебышевского приближения, Киев, 1957. [2] *Л. А. Люстерник, О. А. Червоненкис, А. Р. Янпольский*, Вычисление элементарных функций, М., 1963. [3] *J. F. Hart, E. F. Cheney et al.*, Computer Approximations, N. Y., 1968.