Доклады Академии наук СССР
1974. Том 216, № 4

УДК 513.88 *МАТЕМАТИКА*

Ю. М. ВУВУНИКЯН

ЭВОЛЮЦИОННЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ АЛГЕБРЫ СУММИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ В ЛОКАЛЬНО-ВЫПУКЛОМ ПРОСТРАНСТВЕ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 5 II 1974)

1. Пусть $L(R_+)$ — алгебра (относительно свертки) всех суммируемых функций на $R_+=[0, +\infty)$, X — счетно-полное бочечное локально-выпуклое пространство, $\mathscr{L}(X)$ — алгебра линейных непрерывных операторов из X в X, снабженная сильной операторной топологией, L^+ — подпространство функций из $L(R_+)$, носители которых содержатся в $R^+=(0, +\infty)$.

Определение 1. Представление T алгебры $L(R_+)$ в X, т. е. непрерывный гомоморфизм алгебры $L(R_+)$ в алгебру $\mathscr{L}(X)$, удовлетворяющее следующим двум условиям:

1) из того, что $T(L^+)_x=\{0\}$, следует $x=0$;

2) $T(L^+)X$ тотально в X,

будем называть эволюционным представлением.

Основной результат статьи: между эволюционными представлениями и равностепенно непрерывными полугруппами эндоморфизмов существует взаимно однозначное соответствие.

Тем самым, мы получаем теоремы порождения для эволюционных представлений и представлений алгебры L всех суммируемых на оси функций в локально-выпуклом пространстве.

2. Пусть $W_\infty(R_+)$ — пространство всех суммируемых вместе с любой производной функций на R_+, $W_\infty{}^+$ — подпространство в $W_\infty(R_+)$, состоящее из функций, носители которых содержатся в R^+.

Обозначим через T_0 сужение представления T на $W_\infty{}^+$.

Определение 2. Пусть D — множество тех x из X, для которых найдется такой $y\in X$, что

$$T_0'x=T_0y.$$

Производящим оператором эволюционного представления T называется оператор A, определяемый следующим образом:

$$Ax=y,\quad x\in D.$$

Заметим, что это определение корректно. Действительно, пусть существует такое y_1, что $T_0'x=T_0y_1$. Тогда для любого $f\in W_\infty{}^+$ имеем $T(f)(y-y_1)=0$, и так как $W_\infty{}^+$ плотно в L^+, то $T(L^+)(y-y_1)=0$, и в силу свойства 1) эволюционного представления получаем $y=y_1$.

Перечислим основные свойства производящего оператора.

Теорема 1. *Пусть A — производящий оператор эволюционного представления T. Тогда*

1) *A — замкнутый линейный оператор*;

2) $T_0'x=AT_0x,\quad x\in X$;

3) *D всюду плотно и, более того, пересечение D^∞ областей определения всех степеней оператора A всюду плотно*;

4) $T(f)A\subset AT(f),\quad f\in W_\infty{}^+$.

Используя эти свойства и включение $W_\infty(R_+)*W_\infty{}^+\subset W_\infty{}^+$, нетрудно доказать, что для любого $x\in X$ отображение Tx является фундаментальным в смысле сопряженного к $W_\infty(R_+)$ пространства решением абстрактного эволюционного уравнения, точнее, имеет место

Теорема 2. *Пусть A — производящий оператор эволюционного представления T.*

Тогда для любых $f\in W_\infty(R_+)$ и $x\in X$ справедливы соотношения

$$T(-f')x=AT(f)x+f(0)x, \tag{1}$$

$$T(f)A\subset AT(f). \tag{2}$$

Эволюционному представлению мы сопоставили замкнутый линейный оператор с плотной областью определения. Оказывается, что это соответствие взаимно однозначно.

Теорема 3. *Данный замкнутый линейный оператор A со всюду плотной областью определения может быть производящим оператором не более чем одного эволюционного представления.*

3. Пусть $\lambda\in\Pi_0=\{\lambda\in C\,|\,\mathrm{Re}\,\lambda>0\}$. Возьмем в качестве $f\in W_\infty(R_+)$ функцию $t\mapsto e^{-\lambda t}$, $t\geqslant 0$. Тогда из (1) и (2) получим

$$\lambda T(e^{-\lambda t})x=AT(e^{-\lambda t})x+x, \tag{3}$$

$$T(e^{-\lambda t})A\subset AT(e^{-\lambda t}). \tag{4}$$

Следовательно, существует резольвента $R(\lambda; A)$ оператора A для любого $\lambda\in\Pi_0$, и $R(\lambda; A)=T(e^{-\lambda t})$.

Заметим также, что функции $t\mapsto t^n e^{-\lambda t}$, $n=1, 2, 3, \ldots$, принадлежат пространству $W_\infty(R_+)$, и оценим степени резольвенты. Используя тождество Гильберта, получаем

$$R^n(\lambda; A)=\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}T^{(n-1)}(e^{-\lambda t})=\frac{1}{(n-1)!}T(t^{n-1}e^{-\lambda t}).$$

Возьмем теперь произвольно $x\in X$ и $x'\in X'$ и рассмотрим

$$x'\circ R^n(\lambda; A)x=\frac{1}{(n-1)!}(x'\circ Tx)(t^{n-1}e^{-\lambda t}).$$

Функция $x'\circ Tx$ является линейным непрерывным функционалом на $L(R_+)$ и, следовательно, почти всюду ограничена. Тогда по неравенству Гёльдера имеем оценку

$$|x'\circ R^n(\lambda; A)x|\leqslant\frac{C}{(n-1)!}\int_0^\infty t^{n-1}|e^{-\lambda t}|\,dt=\frac{C}{(\mathrm{Re}\,\lambda)^n},$$

откуда следует, что семейство операторов

$$\{(\mathrm{Re}\,\lambda\cdot R(\lambda; A))^n\,|\,\lambda\in\Pi_0;\ n=0, 1, 2, \ldots\} \tag{5}$$

слабо ограничено и, значит, в силу бочечности пространства, равностепенно непрерывно.

Следовательно, A порождает (единственную!) равностепенно непрерывную полугруппу эндоморфизмов (см. ([1]), стр. 339):

$$U(t)x=\lim_{k\to\infty}e^{tk(kR(\lambda; A)-I)}x,\quad t\geqslant 0;\quad x\in X,$$

Таким образом, произвольному эволюционному представлению алгебры $L(R_+)$ мы поставили в соответствие равностепенно непрерывную полугруппу эндоморфизмов. Обратно, если U — равностепенно непрерывная полугруппа эндоморфизмов, то формула

$$T(f)x=\int_0^\infty f(t)U(t)x\,dt,\quad f\in L(R_+);\quad x\in X,$$

определяет, как легко проверить, эволюционное представление алгебры $L(R_+)$. Это соответствие взаимно однозначно, так как соответствие между эволюционным представлением и его производящим оператором, а также между равностепенно непрерывной полугруппой операторов и ее производящим оператором взаимно однозначны.

Таким образом, установлена

Теорема 4. *Между эволюционными представлениями алгебры $L(R_+)$ и равностепенно непрерывными полугруппами эндоморфизмов существует взаимно однозначное соответствие.*

Из этой теоремы непосредственно вытекает теорема порождения эволюционных представлений.

Теорема 5. *Для того чтобы замкнутый линейный оператор со всюду плотной областью определения был производящим оператором эволюционного представления алгебры $L(R_+)$, необходимо и достаточно, чтобы для любого λ из правой полуплоскости Π_0 существовала резольвента $R(\lambda;\ A)$ оператора A и семейство (5) было равностепенно непрерывным.*

4. Рассмотрим теперь представление V алгебры L всех суммируемых функций на числовой оси в пространстве X.

Пусть $f\in L(R_+)$. Положим

$$f_+(t)=\begin{cases} f(t), & t\geqslant 0,\\ 0, & t<0,\end{cases}\qquad f_-(t)=\begin{cases} 0, & t>0,\\ f(-t), & t\leqslant 0,\end{cases}$$

$$T_+(f)=V(f_+),\quad T_-(f)=V(f_-).$$

Очевидно, что T_+ и T_- являются представлениями алгебры $L(R_+)$ в X. Однако условия 1) и 2) для них могут быть не выполнены. Поэтому введем следующее

Определение 3. Представление V алгебры L в пространстве X будем называть L-представлением, если T_+ и T_- — эволюционные представления алгебры $L(R_+)$.

Тогда производящим оператором L-представления V будем называть производящий оператор эволюционного представления T_+.

Теорема 6. *Между L-представлениями и равностепенно непрерывными группами эндоморфизмов существует взаимно однозначное соответствие. При этом, если U — равностепенно непрерывная группа, то соответствующее ей L-представление V определяется формулой*

$$V(f)x=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)U(t)x\,dt,\qquad f\in L,$$

и тогда

$$T_+(f)x=\int\limits_{0}^{+\infty} f(t)U(t)x\,dt,\qquad T_-(f)x=\int\limits_{0}^{+\infty} f(t)\cdot[U(t)]^{-1}x\,dt.$$

Теорема 7. *Для того чтобы замкнутый линейный оператор A со всюду плотной областью определения был производящим оператором L-представления, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\lambda\in\mathbf{C}$ такого, что $\operatorname{Re}\lambda\neq 0$, существовала резольвента $R(\lambda,\ A)$ оператора A и семейство операторов*

$$\{(|\operatorname{Re}\lambda|\cdot R(\lambda;\ A))^n\,|\operatorname{Re}\lambda\neq 0;\quad n=0,\ 1,\ 2,\ldots\}$$

было равностепенно непрерывным.

Интересно отметить, что в весьма частном случае, когда $X=\mathbf{C}$ — поле комплексных чисел, мы получаем классический результат об общем виде мультипликативных функционалов. Действительно, мультипликативные функционалы на L являются L-представлениями в $\mathbf{C}$. Следовательно, по теореме 7 $a\in\mathbf{C}$ порождает мультипликативный функционал тогда и только тогда, когда существует константа $M>0$, что

$$|\operatorname{Re}\lambda|^n|\lambda-a|^{-n}\leqslant M, \quad \operatorname{Re}\lambda\neq 0; \quad n=0,\ 1,\ 2,\dots,$$

откуда легко вывести, что $\operatorname{Re} a\neq 0$. Таким образом, a порождает мультипликативный функционал V тогда и только тогда, когда $a=ic$, где $c\in\mathbf{R}$; при этом

$$V(f)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,e^{ict}dt, \qquad f\in L.$$

Заметим также, что в случае $X=\mathbf{R}$ из теоремы 7 следует, что существует только одно ненулевое представление V алгебры L в $\mathbf{R}$, порождаемое $a=0$, т. е.

$$V(f)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt.$$

Институт математики
Сибирского отделения Академии наук СССР
Новосибирск

Поступило
23 I 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *К. Иосида*, Функциональный анализ, М., 1967.