Доклады Академии наук СССР
1974. Том 216, № 4

УДК 539.3 *ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ*

Д. Г. ГОРДЕЗИАНИ

О ТОЧНОСТИ ОДНОГО ВАРИАНТА ТЕОРИИ ТОНКИХ ОБОЛОЧЕК

(Представлено академиком И. Н. Векуа 24 X 1973)

В [1-3] построена общая теория упругих оболочек, основываясь на разложении искомых полей смещений и напряжений в ортогональные ряды Фурье по полиномам Лежандра.

Настоящая работа посвящена оценке точности теории [1-3] при сравнении ее с трехмерной теорией упругости. Рассматриваются лишь призматические оболочки. Для простоты изложения берется оболочка постоянной толщины $2h$. Показано, что если решение трехмерной задачи упругости удовлетворяет некоторым условиям гладкости, то точность теории оболочек имеет порядок $O(N^{-m-1/2})$, а если толщина оболочки достаточно мала — $O(h^N)$; N — длина отрезка ряда Фурье — Лежандра, $m>0$ — целое число.

В дальнейшем используются обозначения: $D\subset R^2$ — открытая ограниченная область с границей Γ; $\Omega=\{x|x=(x_1, x_2, x_3)\in R^3, (x_1, x_2)\in D, x_3\in[-h, h]\}$ — трехмерная область, ограниченная поверхностью $S=S^+\cup S^-\cup S_u\cup S_p$, где $S^\pm=\{x|x=(x_1, x_2, x_3)\in S, (x_1, x_2)\in D, x_3=\pm h\}$ — соответственно верхняя и нижняя лицевые поверхности, $S_u=\Gamma_u\times[-h, h]$, $S_p=\Gamma_p\times[-h, h]$, $\Gamma=\Gamma_u\cup\Gamma_p$; $\Gamma_u\cap\Gamma_p=\emptyset$; $H^0(\Omega)=L^2(\Omega)$ — пространство функций, суммируемых в квадрате по Ω; $H^1(\Omega)$ — пространство Соболева первого порядка; $C^m(\Omega)$ — пространство функций, m-раз непрерывно дифференцируемых на Ω; $\mathbf{u}=(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ — вектор-функция и, если $u_i\in H$ $\forall i$, то будем писать $\mathbf{u}\in(H)^n$; $(\cdot,\cdot)_H$, $\|\cdot\|_H$ — скалярное произведение и норма в H. Заметим, что в работе применяется принятое в тензорном анализе правило суммирования: латинские буквы пробегают значения 1, 2, 3, греческие 1, 2.

Рассмотрим теперь упругую однородную сплошную среду, отнесенную к декартовой системе координат и занимающую область Ω. Предположим, что на лицевых поверхностях заданы соответственно напряжения $\mathbf{p}^+$ и $\mathbf{p}^-$, на S_p напряжение $\mathbf{p}=0$, на S_u смещение $\mathbf{u}=0$. Пусть $\mathbf{\Phi}$ — объемная сила. Как известно (см., например, [4, 5]), решение системы равновесия заданного упругого тела эквивалентно следующей задаче.

З а д а ч а 1. Найти вектор $\mathbf{u}_0\in V_0$, реализующий минимум функционала

$$I(\mathbf{u})=a(\mathbf{u}, \mathbf{u})-(\mathbf{\Phi}, \mathbf{u})_{(H^0(\Omega))^3}-\int\limits_{S^+} p_i^+u_i\, ds-\int\limits_{S^-} p_i^-u_i\, ds \quad \text{на } V_0,$$

где

$$V_0=\{\mathbf{u}|, \mathbf{u}=(u_1, u_2, u_3), u_i\in H^1(\Omega), \mathbf{u}=0 \text{ на } \Gamma_u\}, \mathbf{p}^\pm=(p_1^\pm, p_2^\pm, p_3^\pm),$$

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v})=\frac{1}{2}\int\limits_\Omega [\lambda\theta(u)\theta(v)+2\mu e_{ij}(u)\cdot e_{ij}(v)]d\Omega=\frac{1}{2}\int\limits_\Omega p_{ij}(u)\frac{\partial v_i}{\partial x_j}d\Omega,$$

λ, μ — константы Ляме, $\theta(u)=\partial u_i/\partial x_i$, $e_{ij}(u)$ — компоненты тензора деформации, $p_{ij}(u)$ — компоненты тензора напряжения.

Если $\mathbf{u}_0$ — решение задачи 1, то, применяя формулы Бетти, имеем

$$I(\mathbf{u})=a(\mathbf{u}-\mathbf{u}_0,\ \mathbf{u}-\mathbf{u}_0)-a(\mathbf{u}_0,\ \mathbf{u}_0).$$

Отсюда следует, что задача 1 эквивалентна задаче о нахождении минимума функционала

$$E(\mathbf{u})\equiv a(\mathbf{u}-\mathbf{u}_0,\ \mathbf{u}-\mathbf{u}_0)=I(\mathbf{u})-I(\mathbf{u}_0)\ \text{ на }\ V_0.$$

Известно, что

$$E(\mathbf{u})\geqslant\alpha_0\|\mathbf{u}-\mathbf{u}_0\|_V{}^2\ \text{ на }\ V_0, \tag{1}$$

где $\|\mathbf{u}\|_V{}^2=(\partial u_i/\partial x_j,\ \partial u_i/\partial x_j)_{H^0(\Omega)}+(u_i,\ u_i)_{H^0(\Omega)}$, $\alpha_0=\mathrm{const}>0$ не зависит от $\mathbf{u}$ ([4, 5]).

Согласно ([3]), теорию ([1-3]) можно строить следующим образом. Разложим смещения и напряжения в ряды Фурье — Лежандра

$$\mathbf{u}=\sum_{k=0}^{\infty}\overset{k}{\mathbf{u}}P_k\left(\frac{x_3}{h}\right),\quad \mathbf{p}=\sum_{k=0}^{\infty}\overset{k}{\mathbf{p}}P_k\left(\frac{x_3}{h}\right),$$

где $\left\{P_k\left(\dfrac{x_3}{h}\right)\right\}_0^{\infty}$ — полная система полиномов Лежандра,

$$\overset{k}{\mathbf{u}}=h^{-1}(k+{}^1/_2)\int\limits_{-h}^{h}\mathbf{u}P_k(x_3/h)\,dx_3,\qquad \overset{k}{\mathbf{p}}=h^{-1}(k+{}^1/_2)\int\limits_{-h}^{h}\mathbf{p}P_k(x_3/h)\,dx_3.$$

Взяв N-ые отрезки этих рядов $\mathbf{u}_N$, $\mathbf{p}_N$ и подставляя в $I(\cdot)$, получим приближенное выражение $I_N(\mathbf{u}_N)=I(\mathbf{u}_N)$,

$$I(\mathbf{u}_N)=\sum_{k=0}^{N}\frac{h}{2k+1}\left\{\int\limits_D \overset{k}{p}_{ij}D_i\overset{k}{u}_j\,dx_1\,dx_2-\int\limits_D \overset{k}{F}_i\overset{k}{u}_i\,dx_1\,dx_2\right\}$$

где

$$D_iu=\begin{cases}\partial u/\partial x_\alpha, & \text{если }\ i=\alpha,\\ h^{-1}u', & \text{если }\ i=3,\end{cases}$$

$$u'=(2k+1)(\overset{k+1}{u}+\overset{k+3}{u}+\ldots),\qquad \overset{k}{F}_i=\overset{k}{\Phi}_i+\frac{2k+1}{2h}\{p_i{}^+-(-1)^kp_i{}^-\}.$$

Как показано в ([3]), $I(\mathbf{u})-I(\mathbf{u}_N)=O(N^{-m-{}^1/_2})\ \ \forall\mathbf{u}\in(C^{m+2}(\Omega))^3$. Опираясь на эту оценку, в ([3]) заменяют задачу 1 следующей задачей.

З а д а ч а 2. Найти минимум функционала $I_N(\mathbf{u}_N)$ на классе совокупностей векторов $(\overset{0}{u}_1,\ \overset{0}{u}_2,\ \overset{0}{u}_3,\ \ldots\ \overset{N}{u}_1,\ \overset{N}{u}_2,\ \overset{N}{u}_3)$.

Пусть A_N — оператор задачи 2, определенный системой Эйлера — Лагранжа функционала $I_N(\mathbf{u}_N)$ и соответствующими краевыми условиями. Можно утверждать, что A_N положительно определен, существует единственное решение $(\overset{0}{v}_1,\ \overset{0}{v}_2,\ \overset{0}{v}_3,\ \ldots,\ \overset{N}{v}_1,\ \overset{N}{v}_2,\ \overset{N}{v}_3)$ соответствующего уравнения и $\overset{k}{v}_i\in H^1(D)$, $\overset{k}{v}_i=0$ на Γ_u. Отсюда следует, что задача о минимуме функционала $I_N(\cdot)$ и задача с оператором A_N эквивалентны и

$$\mathbf{v}_N=(v_{N,1},\ v_{N,2},\ v_{N,3})\in V_0,\qquad v_{N,i}=\sum_{k=0}^{N}\overset{k}{v}_iP_k\left(\frac{x_3}{h}\right).$$

Таким образом, $\mathbf{v}_N$ принадлежит области определения функционала $I(\cdot)$ и поэтому справедливы соотношения

$$E(\mathbf{v}_N)=\min_{0,N}E(\mathbf{u}_N)\leqslant E(\mathbf{u}_N)=I(\mathbf{u}_N)-I(\mathbf{u}_0),\ \ \mathbf{u}_V\in V_{0,N}, \tag{2}$$

где $V_{0,N}$ — совокупность функций $\mathbf{u}_N \in V_0$, представимых в виде

$$\mathbf{u}_N = \sum_{k=0}^{N} \overset{k}{\mathbf{u}}_N P_k(x_3/h).$$

В частности, соотношения (2) справедливы и для $\mathbf{u}_{0,N} = \sum_{k=0}^{N} \overset{k}{\mathbf{u}}_0 P_k(x_3/h)$, где $\mathbf{u}_0(x_1, x_2, x_3)$ — точное решение задачи 1. Отсюда следует, что

$$a(\mathbf{z}_{0,N}, \mathbf{z}_{0,N}) \leqslant I(\mathbf{u}_{0,N}) - I(\mathbf{u}_0), \tag{3}$$

где $\mathbf{z}_{0,N} = (\mathbf{v}_N - \mathbf{u}_0)$ — погрешность приближенного решения.

Из (3), определения билинейной формы $a(\cdot, \cdot)$ и (1) следуют оценки для $e_{ij}(z_{0,N})$, $\theta(z_{0,N})$, $p_{ij}(z_{0,N})$, $\mathbf{z}_{0,N}$ в норме пространства $H^0(\Omega)$, если будет известна оценка для $I(\mathbf{u}_{0,N}) - I(\mathbf{u}_0)$.

Пользуясь оценкой из [3] для $I(\mathbf{u}_N) - I(\mathbf{u})$ и учитывая сказанное выше, убеждаемся, что верно

Утверждение 1. *Если* $\mathbf{u}_0 \in (C^{m+2}(\Omega))^3$, *то процесс метода* [1-3] *сходится и* $\|\mathbf{z}_{0,N}\|_{(H^0(\Omega))^3}$, $\|\theta(z_{0,N})\|_{H^0(\Omega)}$, $\|e_{ij}(z_{0,N})\|_{H^0(\Omega)}$, $\|p_{ij}(z_{0,N})\|_{H^0(\Omega)}$ — *величины порядка* $O(N^{-1/2(m+1/2)})$.

Можно получить и более точные оценки при тех же условиях. Пусть $\mathbf{u}_0 \in (C^{m+2}(\overline{\Omega}))^3$. Тогда, пользуясь известными оценками для рядов Фурье — Лежандра, можно показать, что

$$\mathbf{u}_0(x_1, x_2, x_3) = \sum_{k=0}^{N} \overset{k}{\mathbf{u}}_0 P_k\left(\frac{x_3}{h}\right) + O(N^{-m-3/2}),$$

$$(\mathbf{u}_0)_{x_3}' = \left(\sum_{k=0}^{N} \overset{k}{\mathbf{u}}_0 P_k\left(\frac{x_3}{h}\right)\right)' + O(N^{-m-1/2}),$$

и, следовательно,

$$a(\mathbf{u}_{0,N} - \mathbf{u}_0, \mathbf{u}_{0,N} - \mathbf{u}_0) = I(\mathbf{u}_{0,N}) - I(\mathbf{u}_0) = O(N^{-(2m+1)}).$$

Отсюда следует

Теорема 1. *Если решение задачи* 2 $\mathbf{u}_0 \in (C^{m+2}(\overline{\Omega}))^3$, *то процесс метода* [1-3] *сходится и*

$$\|\theta(z_{0,N})\|_{H^0(\Omega)} = O(N^{-m-1/2}), \quad \|e_{ij}(z_{0,N})\|_{H^0(\Omega)} = O(N^{-m-1/2}),$$

$$\|p_{ij}(z_{0,N})\|_{H^0(\Omega)} = O(N^{-m-1/2}), \quad \|\mathbf{z}_{0,N}\|_{(H^0(\Omega))^3} = O(N^{-m-1/2}).$$

Предположим теперь, что толщина оболочки достаточно мала и имеют место следующие разложения:

$$\mathbf{u}_0(x_1, x_2, x_3) = \sum_{k=0}^{N} \frac{(x_3)^k}{k!} \overset{(k)}{\mathbf{u}}_{0x_3^k}(x_1, x_2, 0) + O(h^{N+1}),$$

$$(\mathbf{u}_0)_{x_3}' = \left(\sum_{k=0}^{N} \frac{(x_3)^k}{k!} \overset{(k)}{\mathbf{u}}_{0x_3^k}(x_1, x_2, 0)\right)' + O(h^N), \tag{4}$$

$$(\mathbf{u}_0)_{x_\alpha}' = \left(\sum_{k=0}^{N} \frac{(x_3)^k}{k!} \overset{(k)}{\mathbf{u}}_{0x_3^k}(x_1, x_2, 0)\right)_{x_\alpha}' + O(h^{N+1}),$$

$$\alpha = 1, 2, \quad \forall x \in \overline{\Omega}.$$

Утверждение 2. *При условиях* (4) *имеем*

$$\mathbf{u}_0-\mathbf{u}_{0,N}=O(h^{N+1}),\quad (\mathbf{u}_0)'_{x_3}-(\mathbf{u}_{0,N})'_{x_3}=O(h^N),$$

$$(\mathbf{u}_0)'_{x_\alpha}-(\mathbf{u}_{0,N})'_{x_\alpha}=O(h^{N+1}),\ \alpha=1,2,\ \forall x\in\overline{\Omega}.$$

Из этого утверждения, неравенства (3) и определения билинейной формы $a(\cdot,\cdot)$ следует

Теорема 2. *Если справедливы соотношения* (4), *то*

$$\|\theta(z_{0,N})\|_{H^0(\Omega)}=O(h^N),\quad \|e_{ij}(z_{0,N})\|_{H^0(\Omega)}=O(h^N),\quad \|p_{ij}(z_{0,N})\|_{H^0(\Omega)}=O(h^N).$$

Замечание. Оценка для $\|\mathbf{z}_{0,N}\|_{(H^0(\Omega))^3}$ не вытекает из (1), так как α_0, вообще говоря зависит от h. Но несмотря на это, $\Gamma_u=\emptyset$, непосредственным разложением $a(z_{0,N}, z_{0,N})$ можно показать, что имеет место и оценка $\|z_{0,N}\|_{(H^0(\Omega))^3}=O(h^N)$.

Институт прикладной математики
Тбилисского государственного университета

Поступило
10 X 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *И. Н. Векуа*, Тр. Тбилисск. математ. инст., т. 21, 191 (1965). [2] *И. Н. Векуа*, Теория тонких пологих оболочек переменной толщины, Тбилиси, 1965. [3] *И. Н. Векуа*, Вариационные принципы построения теории оболочек, Тбилиси, 1970. [4] *G. Duvaut, J. L. Lions*, Les inéquations en mécanique et en physique, Paris, 1972. [5] *С. Г. Михлин*, Вариационные методы в математической физике, М., 1970.