Доклады Академии наук СССР
1974. Том 216, № 4

УДК 517.946.9 *МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА*

Н. Г. КУЗНЕЦОВ, В. Г. МАЗЬЯ

К ЗАДАЧЕ ОБ УСТАНОВИВШИХСЯ КОЛЕБАНИЯХ СЛОЯ ЖИДКОСТИ В ПРИСУТСТВИИ ПРЕПЯТСТВИЯ

(Представлено академиком В. И. Смирновым 20 IV 1973)

1°. Различные постановки стационарной задачи об отыскании потенциала скоростей малых колебаний тяжелой несжимаемой жидкости исследовались в ([1–11]) и других работах. Настоящая заметка посвящена развитию результатов статьи Ф. Джона ([7]), где доказана теорема об однозначной разрешимости задачи о колебаниях слоя жидкости постоянной глубины в присутствии частично погруженного препятствия. В ([7]) предполагается, что поверхность препятствия удовлетворяет следующему (обеспечивающему единственность решения) условию (I): вертикальная прямая, проходящая через произвольную точку поверхности препятствия, не пересекает свободную поверхность жидкости. Еще одно введенное в ([7]) (используемое в теореме о разрешимости) ограничение на форму препятствия состоит в том, что его поверхность должна быть перпендикулярна свободной поверхности жидкости во всех точках ватерлинии.

Основным результатом настоящей работы является теорема об однозначной разрешимости задачи с частично погруженным препятствием, в которой предполагается выполненным условие (I), а другое условие Ф. Джона заменено требованием некасательности плоскости свободной поверхности жидкости к поверхности препятствия в точках ватерлинии (условие (II)). На ватерлинии допускается конечное число точек, в окрестности каждой из которых поверхность препятствия диффеоморфна конусу (условие (III)).

2°. Пусть в слое $\Omega=\{x\in R^3\,|\,-h<x_3<0,\ 0<h<\infty\}$ выделена область Ξ (препятствие), граница которой состоит из трех непересекающихся множеств: 1) односвязной области D на плоскости $x_3=0$; 2) поверхности S (поверхность препятствия), расположенной на положительном расстоянии от плоскости $B=\{x\in R^3\,|\,x_3=-h\}$ (дно); 3) замкнутой кривой γ (ватерлиния), являющейся одновременно и границей области D, и краем поверхности S. Пусть еще $\Sigma=\Omega\diagdown\overline{\Xi}$ (область, заполнения жидкостью) и $F=\{x\in R^3\,|\,x_3=0\}\diagdown\overline{D}$ (свободная поверхность жидкости). Обозначим через Ω_τ и Σ_τ пересечения слоя Ω и области Σ соответственно с цилиндром $\rho=(x_1^2+x_2^2)^{1/2}<\tau$.

Будем считать, что $\overline{S}$ — многообразие с краем γ, принадлежащее классу C^∞ вне произвольной окрестности множества $\{x^{(1)},\ldots,x^{(n)}\}\subset\gamma$ конических точек многообразия $\overline{S}$.

Потенциал скоростей ищется в виде $\operatorname{Re}\{e^{-i\omega t}u(x)\}$, и задача сводится к отысканию гармонической в Σ функции u, принадлежащей классу $C^1(\overline{\Sigma}\diagdown\{x^{(1)},\ldots,x^{(n)}\})\cap C^{(\delta)}(\overline{\Sigma})$, $\delta>0$, для которой выполняются краевые условия

$$(\partial u/\partial x_3-\lambda u)\,|_F=0,\quad \partial u/\partial x_3\,|_B=0, \tag{1}$$

$$\partial u/\partial n\,|_S=\psi,\quad \psi\in C^1(\overline{S}); \tag{2}$$

здесь $\lambda=\omega^2/g$, g — ускорение свободного падения, n — нормаль к $\overline{S}$, внешняя по отношению к Ξ; под функциями класса $C^1(\overline{S})$ понимаются следы на $\bar{S}$ непрерывно дифференцируемых в некоторой окрестности $\bar{S}$ функций. Решение должно удовлетворять еще условию излучения

$$u=O(\rho^{-1/2}),\quad \frac{\partial u}{\partial\rho}-i\mu_0 u=o(\rho^{-1/2})\quad \text{при } \rho\to\infty, \tag{3}$$

где μ_0 — положительный корень уравнения $\mu\,\mathrm{th}\,\mu h=\lambda$

Наряду с только что определенным классическим решением будем искать обобщенное решение задачи, под которым будем понимать гармоническую в Σ функцию u, принадлежащую пространству С. Л. Соболева $W_2^1(\Sigma_\tau)$ при всяком $\tau>0$, удовлетворяющую краевым условиям (1) в классическом смысле и условию излучения (3), для которой выполняется тождество

$$\iiint\limits_{\Sigma}\nabla u\cdot\overline{\nabla v}\,d\Sigma=\lambda\iint\limits_{F}u\bar{v}\,dF-\iint\limits_{S}\psi\bar{v}\,dS \tag{4}$$

при любой функции $v\in W_2^1(\Sigma)$ с компактным носителем в $\bar{\Sigma}$.

3°. Известен явный вид и хорошо изучены свойства [7] функции Грина $G(x,\xi)$ задачи в слое Ω, т. е. единственного решения уравнения $\Delta u(x)=-4\pi\delta(x-\xi)$ в Ω, $\xi\in\Omega$, удовлетворяющего условию излучения (3) и краевым условиям

$$(\partial u/\partial x_3-\lambda u)|_{x_3=0}=0,\quad \partial u/\partial x_3|_B=0.$$

Если искать обобщенное решение задачи в виде потенциала простого слоя

$$V_\Phi(x)=\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{\bar{S}}\overline{G(x,\xi)}\,\Phi(d_\xi S),\qquad x\in\bar{\Omega}\diagdown\bar{S},$$

где $\Phi\in C^*(\bar{S})$, то из тождества (4) получим уравнение для комплексной меры Радона Φ

$$-\Phi+T^*\Phi=\Psi; \tag{5}$$

здесь $\Psi(E)=\iint\limits_{E}\psi\,dS$ (буквой E всегда будет обозначаться произвольное борелевское подмножество $\bar{S}$), а T^* — оператор, сопряженный оператору T, непрерывно действующему в $C(\bar{S})$ по формуле

$$(Tf)(\xi)=\frac{1}{2\pi}\left\{\iint\limits_{S}f(x)\frac{\partial G}{\partial n}(x,\xi)\,d_xS+\nu(\xi)f(\xi)\right\}.$$

В последнем выражении через $\nu(\xi)$ обозначена функция, равная $2\pi-4\alpha(\xi)$ при $\xi\in\gamma\diagdown\{x^{(1)},\ldots,x^{(n)}\}$, $-2\pi+2\omega_i$ при $\xi=x^{(i)}$, $i=1,\ldots,n$, и нулю при $\xi\in S$; здесь $\alpha(\xi)$ — величина двугранного угла между касательной плоскостью к поверхности $\bar{S}$ в точке $\xi\in\gamma\diagdown\{x^{(1)},\ldots,x^{(n)}\}$ и свободной поверхностью жидкости, а ω_i — телесный угол, под которым видна поверхность S из точки $x^{(i)}$.

4°. В случае отсутствия угловых точек на γ и $\alpha(\xi)=\pi/2$, рассмотренном в [7], функция $\nu(\xi)$ в операторе T исчезает и уравнение (5), в силу свойств функции $G(x,\xi)$, лишь слабой добавкой отличается от обычного уравнения теории потенциала на гладкой замкнутой поверхности, образованной поверхностью $\bar{S}$ и ее зеркальным образом относительно плоскости $x_3=0$. Оператор T при этом вполне непрерывен в пространстве $C(\bar{S})$. Если на γ имеется хоть одна угловая точка или же $\alpha(\xi)\neq\pi/2$, то радиус Фредгольма R оператора T в пространстве $C(\bar{S})$ конечен и, как показывает следующая лемма, просто выражается через функцию $\alpha(\xi)$ и числа $\omega_1,\ldots,\omega_n$.

Лемма 1. *Радиус Фредгольма R вычисляется по формуле*

$$\frac{1}{R}=\max\left\{\sup_{\xi\in\gamma\setminus\{x^{(1)},\ldots,x^{(n)}\}}\left|1-\frac{2}{\pi}\alpha(\xi)\right|,\quad \max_{i=1,\ldots,n}\left|1-\frac{\omega_i}{\pi}\right|\right\}.$$

Таким образом, если выполнены условия (II) и (III), то $R>1$, и, следовательно, к уравнению (5) применима теория Фредгольма.

Пусть выполнены условия (II) и (III). Тогда уравнение

$$-\Phi+T^*\Phi=0 \tag{6}$$

может иметь конечное число нетривиальных решений при некоторых значениях параметра λ. Следуя работе ([7]), будем говорить о правильном (неправильном) случае при отсутствии (наличии) нетривиальных решений уравнения (6).

5°. Если выполнены условия (II) и (III), то в правильном случае уравнение (5) имеет единственное решение $\Phi\in C^*(\overline{S})$, которое определяет потенциал V_Φ. Для того чтобы показать, что V_Φ является обобщенным решением задачи, нужно установить, что $V_\Phi\in W_2{}^1(\Sigma_\tau)$ при всех $\tau>0$. Этот факт выводится из формулируемой ниже леммы 3 о решениях уравнения (5).

Обозначим через $C^*(S;\ \varepsilon',\ \varepsilon'')$, $\varepsilon',\ \varepsilon''>0$, банахово пространство мер Радона, для которых

$$\iint\limits_S |x_3|^{-\varepsilon'}\rho_x^{-\varepsilon''}|\Phi(d_xS)|<\infty,$$

где ρ_x — расстояние от точки x до множества $\{x^{(1)},\ldots,x^{(n)}\}$.

Лемма 2. *Пусть выполнены условия* (II) *и* (III), *а* ε' *и* ε'' — *любые достаточно малые положительные числа.*

Тогда оператор T^* *можно представить в виде* $P+Q$, *где* P — *оператор в пространстве* $C^*(S;\ \varepsilon',\ \varepsilon'')$, $\|P\|<1$, *а оператор* Q *непрерывно действует из* $C^*(\overline{S})$ *в* $C^*(S;\ \varepsilon',\ \varepsilon'']$.

Следствие 1. *Пусть выполнены условия* (II) *и* (III). *Тогда при достаточно малых* ε', $\varepsilon''>0$ *любое решение уравнения* (5), *где* $\Psi\in C^*(S;$ $\varepsilon',\ \varepsilon'')$, *принадлежит пространству* $C^*(S;\ \varepsilon',\ \varepsilon'')$.

С помощью последнего предложения доказывается

Лемма 3. *Пусть выполнены условия* (II) *и* (III) *и в уравнении* (5) $\Psi(E)=\iint\limits_E\psi\,dS$, *где* $\psi\in C^1(\overline{S})$. *Тогда любое решение* Φ *уравнения* (5) *имеет вид* $\Phi(E)=\iint\limits_E\varphi\,dS$, *где* φ — *непрерывная функция на* S, *и при некоторых* δ', $\delta''>0$ *справедлива оценка*

$$\sup_{x\in S}|x_3|^{1-\delta'}\rho_x^{1-\delta''}|\varphi(x)|<\infty. \tag{7}$$

В случае, когда на γ отсутствуют угловые точки, исследование уравнения (5) можно существенно упростить, используя результаты книги ([12]).

Лемма 4. *Пусть выполнены условия* (II) *и* (III) *и* V_Φ — *потенциал, определяемый мерой Радона* $\Phi(E)=\iint\limits_E\varphi dS$, *где* φ — *непрерывная на* S *функция, удовлетворяющая условию* (7) *при некоторых* δ', $\delta''>0$.

Тогда функция $V_\Phi(x)$ *определена и для* $x\in\overline{S}$, *непрерывна в* $\overline{\Omega}$ *и принадлежит пространству* $W_2{}^1(\Omega_\tau)$ *при любом положительном* τ.

6°. Из лемм 3 и 4 вытекает следующее утверждение о разрешимости задачи в правильном случае.

Лемма 5. *Пусть выполнены условия* (II) *и* (III) *и случай — правильный. Тогда существует обобщенное решение задачи, представимое в виде потенциала простого слоя, и такое решение единственно.*

Используя общую схему исследования неправильного случая из работы ([7]), а также леммы 3 и 4, получаем следующее предложение.

Лемма 6. *Пусть выполнены условия* (I) — (III) *и случай — неправильный. Тогда обобщенное решение задачи существует, единственно и представимо в виде* $V_\Phi + \sum_{k=1}^{m} a_k W_k$; *здесь* m — *число линейно независимых решений уравнения* (6), $a_1, \ldots, a_m$ — *комплексные числа,*

$$W_k(x) = \frac{1}{2\pi} \iint_S \Lambda_k(\xi) \frac{\partial G}{\partial n}(x, \xi)\, d_\xi S, \qquad k = 1, \ldots, m,$$

где Λ_k — *функции из класса* $C_0^\infty(S)$, *определяемые по линейно независимым решениям уравнения* (6).

Из лемм 5 и 6 получается

Следствие 2. *Если поверхность* $\bar{S}$ *удовлетворяет условиям* (I) — (III), *то существует одно и только одно обобщенное решение задачи.*

С помощью асимптотических формул, справедливых для решения краевой задачи вблизи γ и точек $x^{(1)}, \ldots, x^{(n)}$, можно показать, что при условиях (II) и (III) обобщенное решение является классическим. Таким образом, имеет место

Теорема. *Если поверхность* $\bar{S}$ *удовлетворяет условиям* (I) — (III), *то существует одно и только одно классическое решение задачи.*

Аналогичные результаты справедливы и для плоской задачи, причем доказательства в этом случае проще.

Ленинградский кораблестроительный институт

Ленинградский государственный университет
им. А. А. Жданова

Поступило
20 III 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *Г. Ламб,* Гидродинамика, М.– Л., 1947. [2] *Дж. Дж. Стокер,* Волны на воде, ИЛ, 1959. [3] *A. Weinstein,* C. R., v. 184, 497 (1927). [4] *Н. Е. Кочин,* Собр. соч., т. 2, Изд. АН СССР, 1949, стр. 277. [5] *G. Kreisel,* Quart. Appl. Math., v. 7, № 1, 21 (1949). [6] *F. John,* Comm. Pure and Appl. Math., v. 2, № 1, 13 (1949). [7] *F. John,* ibid., v. 3, № 1, 45 (1950). [8] *F. Ursell,* Proc. Cambr. Phil. Soc., v. 46, № 1, 141 (1950). [9] *F. Ursell,* Quart. J. Mech. Appl. Math., v. 7, № 4, 427 (1954). [10] *D. S. Jones,* Proc. Cambr. Phil. Soc., v. 49, № 4, 668 (1953). [11] *Б. Р. Вайнберг, В. Г. Мазья,* ДАН, т. 205, № 2, 310 (1972). [12] *T. Carleman,* Über das Neumann – Poincarésche Problem für ein Gebiet mit Ecken, Uppsala, 1916.