Доклады Академии наук СССР
1974. Том 215, № 5

УДК 517.51 *МАТЕМАТИКА*

Ю. А. БРУДНЫЙ

ОБ ОДНОМ СВОЙСТВЕ ФУНКЦИЙ ИЗ ПРОСТРАНСТВА H^λ_p

(Представлено академиком С. М. Никольским 6 IX 1973)

1. Напомним ([1], стр. 18), что функция f принадлежит пространству Никольского $H_p^\lambda(\Omega)$, где Ω — область в $\mathbf{R}^n$, если она и все ее обобщенные производные до порядка $s<\lambda$ принадлежат $L_p(\Omega)$ и $\|\partial^s(f;\ x+h)-\partial^s(f;\ x)\|_{L_p}=O(|h|^\mu)$; здесь s — наибольшее целое число $<\lambda$, $\mu=\lambda-s$ и L_p — норма взята по области определения разности.

В случае $\mu=1$ первая разность заменяется второй. Если область Ω ограничена и граница ее локально липшицева, то эквивалентное определение $H_p^\lambda(\Omega)$ состоит в следующем: $f\in H_p^\lambda(\Omega)$, если $\|\Delta_h^k f\|_{L_p}=O(|h|^\lambda)$ для некоторого $k>\lambda$ (см. [1], стр. 245, и теорему продолжения О. В. Бесова [2]). В случае, если $|h|^\lambda$ заменено произвольной мажорантой $\omega(|h|)$, обозначим соответствующее пространство $H_p^{(k,\omega)}(\Omega)$. Прежде чем сформулировать общий результат, отметим такой частный случай.

Рассмотрим функцию $f\in C(0,\ 1)$ и для заданного отрезка $i=[a,\ b]\subset[0,\ 1]$ положим $\Delta_k(i)=\Delta_h^k(f;\ a)$, где $h=(b-a)/k$. Пусть $V_p^{(k,\lambda)}$ обозначает класс функций, имеющих ограниченную вариацию в следующем смысле:

$$\sup\left\{\sum_s\frac{|\Delta_k(i_s)|^p}{|i_s|^{\lambda p-1}}\right\}^{1/p}<+\infty; \tag{1}$$

верхняя грань взята по всем разбиениям $\{i_1,\ldots,i_n\}$ отрезка $[0,\ 1]$.

В случае $k=\lambda=1$, $p>1$ классический результат Ф. Рисса [3] утверждает, что $V^{(1,1)}=W_p^1$; в общем случае $V_p^{(k,k)}=W_p^k$ при $p>1$ (в случае $p=2$ этот результат принадлежит Шенбергу [4], в общем случае — автору [5]). Из приводимой ниже теоремы следует, что при $1/p<\lambda<k$ имеют место лишь собственные вложения $B_p^\lambda C V^{(k,\lambda)}\subset H_p^\lambda$

$$V_p^{(k,\lambda)}=H_p^\lambda. \tag{2}$$

Аналогичное свойство верно и в случае n переменных; использование этого свойства позволит нам установить ряд новых результатов об аппроксимативных и дифференциальных свойствах функций из пространств H_p^λ.

2. Пусть $E_k^{(p)}(f;\ Q)$ обозначает наилучшее приближение функции f многочленами степени k в метрике $L_p(Q\cap\Omega)$. Здесь и ниже Q обозначает куб с центром в Ω, в π — семейство из попарно не пересекающихся кубов Q.

Пусть Ω — ограниченная область с локально липшицевой границей и $q>p$ таково, что $H_p^\lambda(\Omega)\subset L_q(\Omega)$ (согласно теореме С. М. Никольского ([1], стр. 279), $q=\infty$ для $\lambda p>n$ и q определяется из неравенства $\lambda/n>1/p-1/q$ в противном случае).

Рассмотрим пространство $V_{qp}^{(k,\lambda)}(\Omega)$ функций $f\in L_q(\Omega)$, определяемое конечностью вариации

$$\sup\left\{\sum_{Q\in\pi}\left|\frac{E_{k-1}^{(q)}(f;\ Q)}{(\operatorname{mes}Q)^\mu}\right|^p\right\}^{1/p}, \tag{3}$$

где $\mu=\lambda/n+1/q-1/p$.

Теорема 1. *В сделанных предположениях имеют место вложения*

$$H_p^\lambda(\Omega)=V_{qp}^{(k,\lambda)}(\Omega),\quad 0<\lambda<k. \tag{4}$$

Замечания. 1) В случае $\lambda=k$ имеем $V_{qp}^{(k\,k)}(\Omega)=W_p^k(\Omega)$. Этот результат получен в ([6]) (см. также ([1]), стр. 112). Частный случай $k=1$ получен позже в ([8]).

2) (2) есть частный случай (4) в силу теоремы Уитни ([9]), в n-мерном случае переход к разностям осуществляется с помощью теоремы 1 из ([10]).

3. Установим некоторые новые дифференциальные свойства функций из пространства $H_p^\lambda(\Omega)$; так как это пространство содержит все остальные пространства «гладкости» λ (W_p^λ, $B_p^{\lambda\theta}$, L_p^λ и т. д.), то аналогичные результаты верны и для функций из этих пространств. Первый результат — о поточечной дифференцируемости функций из H_p^λ; по поводу определения тейлоровских пространств $T_p^\lambda(x)$ см ([11]) и книгу ([12]).

Теорема 2. *Если $f\in H_p^\lambda(\Omega)$, λ, дробное и Ω, q, как в теореме 1, то $f\in T_p^\lambda(x)$ для почти всех x.*

Отметим, что соответствующий результат верен и для λ целого; нужно лишь вместо $T_q^\lambda(x)$ использовать несколько более широкий класс $T_q^{\lambda-0}(x)$. Не давая его определения, отметим, что $T_q^{\lambda-\varepsilon}(x)\supset T_q^{\lambda-0}(x)\supset T_q^\lambda(x)$ при любом $\varepsilon>0$.

Теорема 3. *В ситуации теоремы 2 функцию f можно так изменить на множестве сколь угодно малой меры, чтобы исправленная функция принадлежала $G^\lambda(\Omega)$.*

Ранее теорема 3 была получена автором (([7]), стр. 120) для более узкого пространства $B_p^\lambda(\overline{\Omega})$.

4. Перейдем к теоремам о скорости кусочно-полиномиальной аппроксимации. Пусть σ обозначает семейство кубов $Q\subset\mathbf{R}^n$ (быть может, и пересекающихся), которые имеют центры в Ω; через $\mathscr{P}_k(\sigma)$ обозначим семейство функций f вида

$$f=\chi^{-1}\sum_{Q\in\sigma}\chi_Q p_Q;$$

здесь χ_Q — характеристическая функция Q, $\chi=\sum_\sigma\chi_Q$ и p_Q — многочлен степени k. Ясно, что областью определения f служит множество $\|\sigma\|$ равно объединению $Q\in\sigma$ и что в случае, когда кубы из σ попарно не пересекаются, $\mathscr{P}_k(\sigma)$ есть семейство кусочно-полиномиальных функций степени k.

Обозначим для $f\in L_p(\Omega)$

$$E_k^{(p}(f;\sigma)=\inf_{g\in\mathscr{P}_k(\sigma)}\|f-g\|_{Lp(\Omega\cap\|\sigma\|)}.$$

Теорема 4. *Если $f\in H_p^\lambda(\Omega)$ и Ω, q как в теореме 1, то для каждого целого $R\geqslant 1$ найдется такое семейство $\sigma=\sigma_R$, что:*

а) *σ_R покрывает Ω и состоит из R кубов;*

б) *оно может быть разбито в не более чем 2^{2n} семейств, состоящих из попарно не пересекающихся кубов;*

в) *имеет место оценка*

$$E_{k-1}^{(q)}(f;\sigma_R)\leqslant\gamma R^{-\lambda/n}\|f\|_{H_p^\lambda},$$

где $\gamma=\gamma(k,n,p,q)$.

Таким образом, хотя гладкость функций из H_p^λ в пространстве L_q уменьшается, скорость кусочно-полиномиальной аппроксимации такая же, как если мы приближали функции гладкости λ. Для функций n переменных подобный факт впервые установлен в работе Бирмана — Соломяка ([13]) для более узкого пространства $W_p^\lambda(\Omega)$, где Ω — куб. Заметим, что в случае, когда Ω — куб, теорема 4 может быть уточнена: именно, в этом случае в качестве σ_R может быть выбрано разбиение куба Ω, состоящее из не более R кубов. Тем самым получаем усиление указанного выше результата из [13].

Для случая $n=1$ отметим такое следствие. Пусть $e_R^{(q)}(f)$ обозначает наилучшее приближение функции f в метрике $L_q(0, 1)$ (k, l)-сплайнами *, состоящими из не более n кусков.

Следствие. *Если* $f\in H_p^\lambda(0, 1)\subset L_q(0,1)$, *то*

$$e_R^{(q)}(f)\leqslant \gamma R^{-\lambda}\|f\|_{H_p^\lambda},$$

где $\gamma=\gamma(k, p, q)$.

Замечание. Теорема 4 верна и в более общей ситуации, для функций f, удовлетворяющих условию (3), в котором $(\operatorname{mes} Q)^\mu$ заменена на мажоранту $\omega(\operatorname{mes} Q)$. Обозначая этот класс $V_{qp}^{(k,\omega)}(\Omega)$, отметим, что он составляет часть (вообще говоря, правильную) гёльдерова пространства $H_p^{(k,\tilde{\omega})}(\Omega)$, где $\tilde{\omega}(\tau)=\omega(\tau^n)\tau^{n/p-n/q}$.

Примечание при корректуре. 1. Заменяя в (3) знаменатель на $\max\{t^{-1/2}(\operatorname{mes} Q)^{\mu-\varepsilon}, t^{1/2}(\operatorname{mes} Q)^{\mu+\varepsilon}\}$ и беря sup по $t>0$, получаем при достаточно малом $\varepsilon>0$ пространство, изоморфное H_p^λ. 2. Аналоги теорем 2 и 3 верны и по мере Хаусдорфа.

Днепропетровский химико-технологический институт

Поступило
17 VIII 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *С. М. Никольский,* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения, «Наука», 1969. [2] *О. В. Бесов,* Матем. сборн., т. 66, в. 1, 80 (1965). [3] *F. Riesz,* Math. Ann., B. 69, 449 (1910). [4] *I. J. Schoenberg,* Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., v. 51, № 1, 24 (1964). [5] *Ю. А. Брудный,* Матем. сборн., т. 73, 42 (1972). [6] *Ю. А. Брудный,* ДАН, т. 161, № 4, 746 (1965). [7] *Ю. А. Брудный,* Тр. Московск. матем. общ., т. 24, 69 (1971). [8] *A. Ono,* Boll. Unione mat. ital., v. 5, № 2, 230 (1972). [9] *H. Whitney,* J. Math. Pures and Appl., v. 9, № 36, 67 (1957). [10] *Ю. А. Брудный,* Матем. сборн. 82, в. 2, 175 (1970). [11] *A. P. Calderon, A. Zygmund,* Studia Math., v. 20, 171 (1961). [12] *E. M. Stein,* Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions, Princeton, 1970. [13] *М. Ш. Бирман, М. З. Соломяк,* Матем. сборн., т. 73 (115), № 3, 331 (1967).

* Т. е. кусочно-полиномиальными функциями степени k, имеющими гладкость $l\leqslant k$.