

Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. П. Старовойтов, Е. П. Кечко, Верхние оценки модулей нулей аппроксимаций Эрмита–Паде для набора экспоненциальных функций, *Матем. заметки*, 2016, том 99, выпуск 3, 409–420

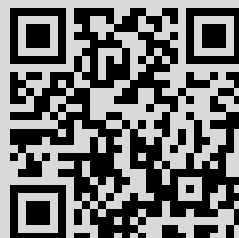
DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10668>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 178.172.151.5

14 февраля 2020 г., 09:49:29





Верхние оценки модулей нулей аппроксимаций Эрмита–Паде для набора экспоненциальных функций

А. П. Старовойтов, Е. П. Кечко

В работе установлены верхние оценки модулей нулей аппроксимаций Эрмита–Паде I типа для системы экспонент $\{e^{\lambda_p z}\}_{p=0}^k$, где $\{\lambda_p\}_{p=0}^k$ – произвольные различные комплексные числа. Доказанные утверждения дополняют и обобщают известные результаты Э. Саффа и Р. Варги, Г. Шталя, Ф. Вилонского о поведении нулей аппроксимаций Эрмита–Паде для набора экспонент $\{e^{p z}\}_{p=0}^k$.

Библиография: 37 названий.

DOI: 10.4213/mzm10668

1. Введение

Различают два типа диагональных аппроксимаций Эрмита–Паде экспоненциальных функций (см. [1], [2]). Один из них (German type – тип II) состоит из совместных рациональных приближений

$$\pi_n^{(j)}(z; e^{j\xi}) = \frac{p_n^{(j)}(z)}{q_n(z)}, \quad j = 1, 2, \dots, k,$$

набора экспонент $\{e^{jz}\}_{j=1}^k$, где многочлены $p_n^{(j)}$, q_n имеют степень не выше kn и определяются из условий

$$q_n(z)e^{jz} - p_n^{(j)}(z) = O(z^{kn+n+1}), \quad z \rightarrow 0. \quad (1.1)$$

Впервые такие конструкции рациональных дробей появились в известной работе Эрмита [3], посвященной доказательству трансцендентности числа e . Линдeman (см. [4]) определил аналоги дробей Эрмита для системы экспонент $\{e^{\lambda_j z}\}_{j=1}^k$, где λ_j – различные алгебраические числа, и применил их, в частности, для доказательства трансцендентности числа π . Аптекаревым [5] была установлена равномерная сходимости рациональных функций $\pi_n^{(j)}(z; e^{\lambda_j \xi})$ к $e^{\lambda_j z}$ на компактах в $\mathbb{C}$ для систем $\{e^{\lambda_j z}\}_{j=1}^k$ с произвольными различными и отличными от нуля комплексными показателями λ_j . При $k = 1$ этот результат хорошо известен и принадлежит Паде [6].

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования Республики Беларусь в рамках Государственной программы научных исследований на 2011–2015 годы.

Немного позже Эрмит [7] ввел другой тип аппроксимаций (Latin type – тип I), с помощью которых также можно доказать трансцендентность числа e [8]. Для системы экспонент $\{e^{pz}\}_{p=0}^k$ эти аппроксимации совпадают с набором из $k+1$ многочленов $\{A_p(z)\}_{p=0}^k$ степени не выше $n-1$, для которых

$$\sum_{p=0}^k A_p(z)e^{pz} = O(z^{kn+n-1}), \quad z \rightarrow 0, \quad (1.2)$$

где предполагается, что хотя бы один многочлен $A_p(z)$ тождественно не равен нулю.

При $k=1$ общая постановка задачи о нахождении многочленов, удовлетворяющих равенствам (1.1), (1.2), принадлежит Паде [6]. В многомерном случае, когда $k \geq 2$, с выходом в свет работ К. Малера [1], [8], [9] изучение аппроксимаций Эрмита–Паде I и II типов для произвольных систем аналитических функций становится более интенсивным и приобретает системный характер (подробнее о создании формальной теории см., например, [2], [10], [11]).

Оба типа аппроксимаций, явно различные в многомерном случае, традиционно имеют множество приложений в теории приближений аналитических функций [12]–[15] и в теории чисел, в частности, для измерения иррациональности [16], в доказательствах трансцендентности [9], в исследованиях алгебраической природы математических констант [17] (о других приложениях см., например, [18]–[22]).

В одномерном случае, когда $k=1$, приходим к классическим аппроксимациям Паде экспоненты. При этом многочлены Паде

$$p_{n-1}(z) := p_{n-1}^{(1)}(z) = -A_0(z), \quad q_{n-1}(z) = A_1(z)$$

находятся из условий

$$q_{n-1}(z)e^z - p_{n-1}(z) = O(z^{2n-1}) \quad (1.3)$$

с точностью до однородной константы. Однородная константа задается удобными в конкретной ситуации условиями нормировки, которые однозначно определяют эти многочлены.

Поведение нулей многочленов Тейлора функций, связанных с экспоненциальной функцией, исследовал Сеге [23]. Сафф и Варга [24] изучили расположение нулей аппроксимаций Паде экспоненты и нашли границы кольца, в котором находятся нули ее многочленов Паде. В частности, в диагональном случае ими доказано следующее утверждение, известное как “теорема о кольце”.

ТЕОРЕМА 1 (Сафф, Варга [24]). *Для любых $n \geq 2$ все нули аппроксимаций Паде $p_{n-1}(z)/q_{n-1}(z)$ функции e^z лежат в кольце*

$$K = \left\{ z : 2(n-1)\mu < z < 2\left(n - \frac{1}{3}\right) \right\},$$

где $\mu = 0,278465$ – единственный положительный корень уравнения $te^{t+1} = 1$.

В силу хорошо известного тождества $q_{n-1}(z) = p_{n-1}(-z)$, предыдущее утверждение справедливо и для нулей $q_{n-1}(z)$.

В работе [25] Вилонский получил оценку сверху для модулей нулей многочленов $\{A_p(z)\}_{p=0}^k$, которые определяются равенствами (1.2). Шталь [26] исследовал

расположение нулей преобразованных с помощью масштабирования независимой переменной квадратичных диагональных аппроксимаций Эрмита–Паде I и II типов системы экспонент $\{1, e^z, e^{2z}\}$ и показал, что указанные нули лежат на специальных дугах комплексной плоскости. Эти исследования продолжены им в [27] (см. также работы [28]–[34]).

В данной статье рассматриваются диагональные аппроксимации Эрмита–Паде I типа для системы экспонент $\{e^{\lambda_p z}\}_{p=0}^k$ с произвольными различными комплексными показателями $\{\lambda_p\}_{p=0}^k$. Нас интересует поведение нулей многочленов $\{A_n^p(z)\}_{p=0}^k$, имеющих степень не выше $n-1$ и удовлетворяющих условиям

$$\sum_{p=0}^k A_n^p(z) e^{\lambda_p z} = O(z^{kn+n-1}), \quad z \rightarrow 0. \quad (1.4)$$

Сформулируем основной результат.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\{\lambda_p\}_{p=0}^k$ – произвольные различные комплексные числа. Тогда при $n \geq 2$, $k \geq 1$ нули многочлена $A_n^p(z)$, $0 \leq p \leq k$, лежат в круге $\{z : |z| < R_n^p\}$, где

$$R_n^p = 2 \left(n - \frac{1}{3} \right) \left[\sum_{j=1}^p \frac{1}{|\lambda_p - \lambda_{p-j}|} + \sum_{j=1}^{k-p} \frac{1}{|\lambda_{p+j} - \lambda_p|} \right]. \quad (1.5)$$

В случаях, когда $p=0$ или $p=k$, соответственно первая и вторая суммы в скобках равны нулю.

При $\lambda_p = p$, $p=0, 1, \dots, k$ и $k=1$ из теоремы 2 следует, что все нули многочленов Паде $q_{n-1}(z)$, $p_{n-1}(z)$ лежат в круге $\{z : |z| < 2(n-1/3)\}$, что согласуется с теоремой Саффа, Варги.

Если $\lambda_p = p$, $p=0, 1, \dots, k$, и $k \geq 2$, то из (1.5) в качестве следствия вытекает теорема 2.2 из работы [25] Вилонского: все нули многочлена $A_p(z)$, лежат в круге $\{z : |z| < R_p\}$, где

$$R_p = 2 \left(n - \frac{1}{3} \right) \left[\sum_{j=1}^p \frac{1}{j} + \sum_{j=1}^{k-p} \frac{1}{j} \right].$$

Заметим, что многочлены $\{A_n^p(z)\}_{p=0}^k$, удовлетворяющие равенствам (1.4), могут быть получены решением линейной системы $kn + n - 1$ однородных уравнений с $kn + n$ неизвестными коэффициентами. Поэтому нетривиальное решение всегда существует. Более того, такие нетривиальные решения могут быть выписаны в явном виде. Действительно, пусть C_p – граница круга с центром в точке λ_p столь малого радиуса, что все остальные λ_j лежат во внешности этого круга. Используя теорему Коши о вычетах, легко показать, что искомые многочлены можно представить в виде

$$A_n^p(z) = \frac{e^{-\lambda_p z}}{2\pi i} \int_{C_p} \frac{e^{\xi z} d\xi}{[\varphi(\xi)]^n}, \quad 0 \leq p \leq k, \quad (1.6)$$

где $\varphi(\xi) = (\xi - \lambda_0)(\xi - \lambda_1) \cdots (\xi - \lambda_k)$.

2. Доказательство теоремы 2

В линейном пространстве $\mathcal{P}$, состоящем из всех многочленов, определим линейные операторы

$$T_\lambda = \lambda I + D,$$

где λ – произвольное комплексное число, I – единичный оператор, а $D = d/dz$ – оператор дифференцирования.

ЛЕММА 1. Любые два оператора $T_{\lambda_1}, T_{\lambda_2}$ коммутативны, т.е.

$$T_{\lambda_1} \cdot T_{\lambda_2} = T_{\lambda_2} \cdot T_{\lambda_1}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение леммы вытекает из легко проверяемого равенства

$$T_{\lambda_1} \cdot T_{\lambda_2}(S) = \lambda_1 \lambda_2 S + (\lambda_1 + \lambda_2)S' + S'', \quad S \in \mathcal{P}.$$

Лемма 1 доказана.

ЛЕММА 2. Для произвольного $\lambda \in \mathbb{R}$ и $S \in \mathcal{P}$ справедливы тождества

$$D^p(e^{\lambda z} \cdot S(z)) = e^{\lambda z} \cdot T_\lambda^p(S(z)), \quad p = 1, 2, \dots \quad (2.1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как

$$D(e^{\lambda z} \cdot S(z)) = e^{\lambda z}(\lambda S(z) + S'(z)),$$

то при $p = 1$ тождество (2.1) доказано. Далее применим метод индукции. Предположим, что $p \geq 2$ и (2.1) справедливо при $p - 1$. Тогда, используя утверждение леммы 1, получаем

$$\begin{aligned} D^p(e^{\lambda z} \cdot S(z)) &= D[D^{p-1}(e^{\lambda z} \cdot S(z))] = D[e^{\lambda z}(\lambda I + D)^{p-1}(S(z))] \\ &= e^{\lambda z} \cdot T_\lambda^{p-1}(\lambda S(z) + S'(z)) = e^{\lambda z} \cdot T_\lambda^p(S(z)). \end{aligned}$$

Лемма 2 доказана.

Найдем явный вид обратного оператора к T_λ^m в случае, когда $m = 0, 1, 2, \dots$ и $\lambda \neq 0$. Для этого на $\mathcal{P}$ определим линейные операторы

$$A_{\lambda, m} S := \lambda^{-m} \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \binom{-m}{j} \frac{D^j S}{\lambda^j}, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (2.2)$$

Если $S \in \mathcal{P}$, то правая часть в (2.2) состоит из конечного числа слагаемых. Это следует из того, что при $j > \deg S$ j -й член ряда в (2.2) равен нулю.

ЛЕММА 3. При $\lambda \neq 0$ и $m = 0, 1, 2, \dots$ обратный оператор для оператора T_λ^m существует и, если обозначить его через T_λ^{-m} , то

$$T_\lambda^{-m} S := \lambda^{-m} \cdot \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \binom{m-1-j}{m-1} \frac{D^j S}{\lambda^j}. \quad (2.3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $m = 0$ утверждение леммы справедливо, так как в этом случае из определения биномиальных коэффициентов (см. [35; п. 1.5, приложение I]) следует, что $T_\lambda^{-m} = I$. Пусть $m \geq 1$. Используя рекуррентную формулу для биномиальных коэффициентов и лемму 1, получаем

$$\begin{aligned} A_{\lambda,m} \cdot (\lambda I + D)S &= \lambda A_{\lambda,m} \cdot \left(I + \frac{D}{\lambda} \right) S \\ &= \lambda^{-m+1} \left[\sum_{j=0}^{\infty} \binom{-m}{j} \frac{D^j S}{\lambda^j} + \sum_{j=0}^{\infty} \binom{-m}{j} \frac{D^{j+1} S}{\lambda^{j+1}} \right] \\ &= \lambda^{-m+1} \left[S + \sum_{j=1}^{\infty} \left\{ \binom{-m}{j} + \binom{-m}{j-1} \right\} \frac{D^j S}{\lambda^j} \right] \\ &= \lambda^{-m+1} \sum_{j=0}^{\infty} \binom{-m+1}{j} \frac{D^j S}{\lambda^j} = A_{\lambda,m-1} S. \end{aligned}$$

Таким образом, $A_{\lambda,m} \cdot T_\lambda = A_{\lambda,m-1}$. Поэтому справедливы равенства

$$(A_{\lambda,m} \cdot T_\lambda^m)S = A_{\lambda,m} \cdot T_\lambda \cdot T_\lambda^{m-1}(S) = (A_{\lambda,m-1} \cdot T_\lambda^{m-1})S = \dots = A_{\lambda,0}S = S.$$

Отсюда следует, что оператор $A_{\lambda,m}$ является левым обратным к оператору T_λ^m . Поскольку согласно лемме 1 эти операторы коммутативны, то $A_{\lambda,m}$ является и правым обратным к оператору T_λ^m .

Для биномиальных коэффициентов имеют место равенства

$$\binom{-m}{j} = (-1)^j \binom{m-1+j}{j} = (-1)^j \binom{m-1+j}{m-1}.$$

Поэтому из (2.2) следует, что оператор T_λ^{-m} можно представить в виде (2.3). Лемма 3 доказана.

ЛЕММА 4. При $n \geq 2$ многочлены Паде q_{n-1}, p_{n-1} можно нормировать так, что

$$\begin{aligned} q_{n-1}(z) &= p_{n-1}(-z) = T_1^{-n}(z^{n-1}) \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j \binom{n-1-j}{n-1} \frac{(n-1)!}{(n-1-j)!} z^{n-1-j}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Дифференцируя равенство (1.3) n раз, с учетом леммы 2 получим

$$e^z T_1^n(q_{n-1}(z)) = c_n(2n-1)(2n-2) \dots n z^{n-1} + \dots.$$

Отсюда, так как $e^{-z} = 1 - z + \dots$,

$$T_1^n(q_{n-1}(z)) = c_n(2n-1)(2n-2) \dots n z^{n-1} + \dots. \quad (2.5)$$

Слева в (2.5) стоит многочлен степени не выше $n-1$. Поэтому

$$T_1^n(q_{n-1}(z)) = c_n(2n-1)(2n-2) \dots n z^{n-1}.$$

Выбирая условия нормировки $q_{n-1}(z)$ так, чтобы $c_n = ((2n-1)(2n-2)\cdots n)^{-1}$, и учитывая линейность оператора T_1^n , получим, что

$$T_1^n(q_{n-1}(z)) = z^{n-1}.$$

Теперь для завершения доказательства достаточно воспользоваться леммой 3. Лемма 4 доказана.

Перейдем непосредственно к доказательству теоремы 2. Сначала найдем новое представление для многочлена $A_n^p(z)$. Для этого разделим равенство (1.4) на $e^{\lambda_0 z}$ и затем продифференцируем n раз. С учетом леммы 2 получим

$$e^{(\lambda_k - \lambda_0)z} T_{\lambda_k - \lambda_0}^n(A_n^k(z)) + \cdots + e^{(\lambda_1 - \lambda_0)z} T_{\lambda_1 - \lambda_0}^n(A_n^1(z)) = O(z^{kn-1}).$$

Разделим предыдущее равенство на $e^{(\lambda_1 - \lambda_0)z}$ и затем продифференцируем n раз. В результате приходим к равенству

$$e^{(\lambda_k - \lambda_1)z} T_{\lambda_k - \lambda_1}^n T_{\lambda_k - \lambda_0}^n(A_n^k(z)) + \cdots + e^{(\lambda_2 - \lambda_1)z} T_{\lambda_2 - \lambda_1}^n T_{\lambda_2 - \lambda_0}^n(A_n^2(z)) = O(z^{(k-1)n-1}).$$

Повторяя указанную последовательность действий еще $p-2$ раз, получим, что

$$\begin{aligned} & e^{(\lambda_k - \lambda_{p-1})z} T_{\lambda_k - \lambda_{p-1}}^n \cdots T_{\lambda_k - \lambda_1}^n T_{\lambda_k - \lambda_0}^n(A_n^k(z)) + \cdots \\ & + e^{(\lambda_p - \lambda_{p-1})z} T_{\lambda_p - \lambda_{p-1}}^n \cdots T_{\lambda_p - \lambda_1}^n T_{\lambda_p - \lambda_0}^n(A_n^p(z)) = O(z^{(k-p+1)n-1}). \end{aligned}$$

Разделим теперь предыдущее равенство на $e^{(\lambda_k - \lambda_{p-1})z}$ и продифференцируем n раз. Повторив эту процедуру еще $k-p-1$ раз, придем к окончательному соотношению:

$$T_{-(\lambda_{p+1} - \lambda_p)}^n \cdots T_{-(\lambda_k - \lambda_p)}^n T_{\lambda_p - \lambda_{p-1}}^n \cdots T_{\lambda_p - \lambda_1}^n T_{\lambda_p - \lambda_0}^n(A_n^p(z)) = O(z^{n-1}).$$

Так как в левой части предыдущего равенства стоит многочлен степени не выше $n-1$, то

$$T_{-(\lambda_{p+1} - \lambda_p)}^n \cdots T_{-(\lambda_k - \lambda_p)}^n T_{\lambda_p - \lambda_{p-1}}^n \cdots T_{\lambda_p - \lambda_1}^n T_{\lambda_p - \lambda_0}^n(A_n^p(z)) = c_p z^{n-1}.$$

Отсюда, с учетом леммы 3, следует, что

$$A_n^p(z) = c_p T_{\lambda_p - \lambda_0}^{-n} T_{\lambda_p - \lambda_1}^{-n} \cdots T_{\lambda_p - \lambda_{p-1}}^{-n} T_{-(\lambda_k - \lambda_p)}^{-n} \cdots T_{-(\lambda_{p+1} - \lambda_p)}^{-n}(z^{n-1}). \quad (2.6)$$

Далее воспользуемся следующей теоремой Уолша [36] (см. также [37; гл. 4, § 18, теорема 18.1]).

ТЕОРЕМА 3 (Уолш). *Предположим, что*

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{j=0}^n a_j z^j, & g(z) &= \sum_{j=0}^n b_j z^j = b_n \prod_{j=1}^n (z - \beta_j), \\ h(z) &= \sum_{j=0}^n (n-j)! b_{n-j} f^{(j)}(z). \end{aligned}$$

Тогда если нули $f(z)$ лежат в круге U , то все нули $h(z)$ являются точками множества G , которое состоит из n кругов U_j , $j = 1, 2, \dots, n$, где круг U_j получен параллельным переносом U в направлении вектора β_j на величину, равную длине вектора β_j .

Пусть S_{n-1} – произвольный многочлен степени не выше $n-1$. Принимая во внимание равенство (2.3), нетрудно заметить, что функции

$$f(z) = S_{n-1}(z), \quad h(z) = T_{\lambda}^{-n}(S_{n-1}(z)), \quad \lambda \neq 0, \\ g(z) = \sum_{j=0}^{n-1} b_{n-1-j} z^{n-1-j} = \lambda^{-n} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(-1)^j}{(n-1-j)!} \binom{n-1-j}{n-1} \frac{z^{n-1-j}}{\lambda^j}$$

удовлетворяют условиям теоремы Уолша. Кроме того, если сравнить предыдущее равенство для многочлена $g(z)$ и равенство (2.4), то легко обнаружить, что

$$g(z) = \frac{\lambda^{-2n+1}}{(n-1)!} q_{n-1}(\lambda z).$$

Из теоремы 1 следует, что нули $q_{n-1}(\lambda z)$ по модулю меньше $2(n-1/3)/|\lambda|$. Согласно теореме Уолша нули $h(z) = T_{\lambda}^{-n}(S_{n-1}(z))$ по модулю меньше $\rho + 2(n-1/3)/|\lambda|$, где ρ – радиус круга с центром в нуле, который содержит все нули $S_{n-1}(z)$.

Применим предыдущее утверждение для

$$S_{n-1}(z) = z^{n-1} \quad \text{и} \quad h(z) = T_{-(\lambda_{p+1}-\lambda_p)}^{-n}(z^{n-1}).$$

Тогда нули $h(z)$ по модулю меньше

$$2\left(n - \frac{1}{3}\right) \frac{1}{|\lambda_{p+1} - \lambda_p|}.$$

Далее, полагая

$$S_{n-1}(z) = T_{-(\lambda_{p+1}-\lambda_p)}^{-n}(z^{n-1}), \quad h(z) = T_{-(\lambda_{p+2}-\lambda_p)}^{-n}(S_{n-1}(z)),$$

еще раз применим предыдущее утверждение. Тогда нули $h(z)$ по модулю меньше

$$2\left(n - \frac{1}{3}\right) \left[\frac{1}{|\lambda_{p+2} - \lambda_p|} + \frac{1}{|\lambda_{p+1} - \lambda_p|} \right].$$

Опираясь на равенство (2.6) и продолжая аналогичные рассуждения, после конечного числа шагов получим, что нули полинома A_n^p по модулю меньше

$$2\left(n - \frac{1}{3}\right) \left[\sum_{j=1}^p \frac{1}{|\lambda_p - \lambda_{p-j}|} + \sum_{j=1}^{k-p} \frac{1}{|\lambda_{p+j} - \lambda_p|} \right].$$

Теорема 2 доказана.

3. Точность оценки. Примеры

Согласно теореме 2 нули многочленов Эрмита A_n^p лежат в круге с центром в нуле, радиус которого R_n^p зависит как от степени многочлена, так и от взаимного расположения множителей в показателях экспонент $\{e^{\lambda_p z}\}_{p=0}^k$. В связи с этим представляет интерес вопрос о точности полученной в теореме 2 верхней оценки для модулей

нулей A_n^p в случае, когда n фиксировано, а расстояние между соседними членами последовательности $\{\lambda_p\}_{p=0}^k$ является сколь угодно малой величиной.

Представление многочленов A_n^p с помощью интегралов в виде (1.6) позволяет получить для них явные выражения, а при $n = 2, 3, 4$ найти точные значения всех нулей A_n^p . Для простоты здесь ограничимся случаями, когда $n = 2, 3$.

Прежде чем перейти к примерам, напомним, что при $\varepsilon \rightarrow 0$ две бесконечно большие функции $\varphi(\varepsilon)$, $\psi(\varepsilon)$, принимающие положительные значения, имеют одинаковый порядок ($\varphi(\varepsilon) \asymp \psi(\varepsilon)$), если $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varphi(\varepsilon)/\psi(\varepsilon) = A$, где $0 < A < +\infty$.

3.1. Рассмотрим систему экспонент $\{e^{\lambda_p z}\}_{p=0}^2$, где $\lambda_0 = 0$, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 1 + \varepsilon$, а $0 < \varepsilon \leq 1$. Далее запись

$$A_n^p : z_j^p(\varepsilon), \quad j = 1, 2, \dots, n-1$$

означает, что $z_j^p(\varepsilon)$ – все нули многочлена A_n^p .

Пусть $r_n^p(\varepsilon) := \max\{|z_j^p(\varepsilon)| : j = 1, 2, \dots, n-1\}$, а $R_n^p(\varepsilon)$ – радиус круга, содержащего все нули, который определяется равенством (1.5). Тогда

$$A_2^0 : z_1^0(\varepsilon) = -2 \frac{(2 + \varepsilon)}{1 + \varepsilon}, \quad A_2^1 : z_1^1(\varepsilon) = -2 \frac{(1 - \varepsilon)}{\varepsilon}, \quad A_2^2 : z_1^2(\varepsilon) = 2 \frac{(1 + 2\varepsilon)}{\varepsilon(1 + \varepsilon)}.$$

Отсюда следует, что при $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} r_2^p(\varepsilon) &\asymp R_2^p(\varepsilon) \asymp \frac{1}{\varepsilon} \quad \text{для } p = 1, 2, \\ 4 \leq r_2^0(\varepsilon) &< R_2^0(\varepsilon) = \frac{10}{3} \left(1 + \frac{1}{1 + \varepsilon}\right) \leq \frac{20}{3}. \end{aligned}$$

Аналогично

$$\begin{aligned} A_3^0 : z_{1,2}^0(\varepsilon) &= \frac{-3(2 + \varepsilon) \pm i\sqrt{3}\sqrt{2 + 2\varepsilon + \varepsilon^2}}{1 + \varepsilon}, \\ A_3^1 : z_{1,2}^1(\varepsilon) &= \frac{-3(1 - \varepsilon) \pm i\sqrt{3}\sqrt{1 + \varepsilon^2}}{\varepsilon}, \\ A_3^2 : z_{1,2}^2(\varepsilon) &= \frac{3(1 + 2\varepsilon) \pm i\sqrt{3}\sqrt{1 + 2\varepsilon + 2\varepsilon^2}}{\varepsilon(1 + \varepsilon)}. \end{aligned}$$

Поэтому при $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} r_3^p(\varepsilon) &\asymp R_3^p(\varepsilon) \asymp \frac{1}{\varepsilon} \quad \text{для } p = 1, 2, \\ \sqrt{42} &\leftarrow r_3^0(\varepsilon) < R_3^0(\varepsilon) = \frac{16}{3} \left(1 + \frac{1}{1 + \varepsilon}\right) \leq \frac{32}{3}. \end{aligned}$$

3.2. Рассмотрим систему экспонент $\{e^{\lambda_p z}\}_{p=0}^3$, где $\lambda_0 = 0$, $\lambda_1 = 1 - \varepsilon$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 1 + \varepsilon$, а $0 < \varepsilon < 1$. Сохраняя предыдущие обозначения, с помощью элементарных вычислений получаем

$$\begin{aligned} A_2^0 : z_1^0(\varepsilon) &= -\frac{(6 - 2\varepsilon)}{1 - \varepsilon^2}, & A_2^1 : z_1^1(\varepsilon) &= -\frac{(3 - 5\varepsilon)}{\varepsilon(1 - \varepsilon)}, \\ A_2^2 : z_1^2(\varepsilon) &= 2, & A_2^3 : z_1^3(\varepsilon) &= \frac{(3 + 5\varepsilon)}{\varepsilon(1 + \varepsilon)}. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что при $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} r_2^p(\varepsilon) &\asymp R_2^p(\varepsilon) \asymp \frac{1}{\varepsilon} \quad \text{для } p = 1, 3, \\ 6 \leftarrow r_2^0(\varepsilon) &< R_2^0(\varepsilon) = \frac{10}{3} \left(1 + \frac{2}{1 - \varepsilon^2} \right), \\ 2 = r_2^2(\varepsilon) &< R_2^2(\varepsilon) = \frac{10}{3} \left(1 + \frac{2}{\varepsilon} \right) \asymp \frac{1}{\varepsilon}. \end{aligned}$$

Если $\varepsilon \rightarrow 1$, то

$$\begin{aligned} r_2^p(\varepsilon) &\asymp R_2^p(\varepsilon) \asymp \frac{1}{1 - \varepsilon} \quad \text{для } p = 0, 1, \\ 2 = r_2^2(\varepsilon) &< R_2^2(\varepsilon) = \frac{10}{3} \left(1 + \frac{2}{\varepsilon} \right), \\ 4 \leftarrow r_2^3(\varepsilon) &< R_2^3(\varepsilon) = \frac{10}{3} \left(\frac{1}{1 + \varepsilon} + \frac{3}{2\varepsilon} \right). \end{aligned}$$

Аналогично,

$$\begin{aligned} A_3^0 : z_{1,2}^0(\varepsilon) &= -\frac{9 - \varepsilon^2 \pm i\sqrt{3}\sqrt{3 + \varepsilon^4}}{1 - \varepsilon^2}, \\ A_3^1 : z_{1,2}^1(\varepsilon) &= -\frac{9 - 15\varepsilon \pm i\sqrt{3}\sqrt{5 - 10\varepsilon + 9\varepsilon^2}}{2\varepsilon(1 - \varepsilon)}, \\ A_3^2 : z_{1,2}^2(\varepsilon) &= \frac{2\varepsilon \pm i\sqrt{3}\sqrt{2 + \varepsilon^2}}{\varepsilon}, \\ A_3^3 : z_{1,2}^3(\varepsilon) &= \frac{9 + 15\varepsilon \pm i\sqrt{3}\sqrt{5 + 10\varepsilon - 9\varepsilon^2}}{2\varepsilon(1 + \varepsilon)}. \end{aligned}$$

Поэтому, если $\varepsilon \rightarrow 0$, то

$$\begin{aligned} r_3^p(\varepsilon) &\asymp R_3^p(\varepsilon) \asymp \frac{1}{\varepsilon} \quad \text{для } p = 1, 2, 3, \\ \sqrt{90} \leftarrow r_3^0(\varepsilon) &< R_3^0(\varepsilon) = \frac{16}{3} \left(1 + \frac{2}{1 - \varepsilon^2} \right). \end{aligned}$$

При $\varepsilon \rightarrow 1$

$$\begin{aligned} r_3^p(\varepsilon) &\asymp R_3^p(\varepsilon) \asymp \frac{1}{1 - \varepsilon} \quad \text{для } p = 0, 1, \\ \sqrt{13} \leftarrow r_3^2(\varepsilon) &< R_3^2(\varepsilon) = \frac{16}{3} \left(1 + \frac{2}{\varepsilon} \right), \\ \frac{\sqrt{582}}{4} \leftarrow r_3^3(\varepsilon) &< R_3^3(\varepsilon) = \frac{16}{3} \left(\frac{1}{1 + \varepsilon} + \frac{3}{2\varepsilon} \right). \end{aligned}$$

Примеры 3.1 и 3.2 показывают, что для рассматриваемых в них систем экспонент при $n = 2, 3$ полученные в теореме 2 неравенства для модулей нулей соответствующих многочленов Эрмита являются точными в смысле порядка при $\varepsilon \rightarrow 0$ ($\varepsilon \rightarrow 1$). Оценка является точной и в случае $n = 4$. При этом не все нули многочленов Эрмита с убыванием расстояния между соседними членами последовательности $\{\lambda_p\}_{p=0}^k$ стремятся к бесконечности. В частности, имеются нули, которые не зависят от ε

(в примере 3.2 $z_1^2(\varepsilon) = 2$ при всех $0 < \varepsilon < 1$), а также равные нулю (в примере 3.1 $z_1^1(1) = 0$). Уже это говорит о том, что в общем случае нахождение нижних оценок для модулей нулей многочленов Эрмита и, в частности, получение некоторого аналога теоремы Саффа и Варги о кольце, является достаточно трудной задачей. Более веским аргументом в поддержку сказанного является следующий пример (нами установлено, что при $k = 3$, $n = 2, 3, 4$ и $\varepsilon \rightarrow 0$ он также является иллюстрацией точности по порядку неравенств для модулей нулей в теореме 2).

3.3. Рассмотрим систему экспонент $\{e^{\lambda_p z}\}_{p=0}^k$, где $k \geq 2$, $\lambda_0 = 0$, а $\{\lambda_p\}_{p=1}^k$ являются корнями уравнения $z^k = \varepsilon^k$, $\varepsilon > 0$. Далее предполагаем, что $2 \leq n \leq k$. Для вычисления интеграла в (1.6) при $p = 0$ применим теорему Коши о вычетах. В результате получим

$$A_n^0(z) = \frac{1}{(n-1)!} \left[\frac{e^{\xi z}}{b^n(\xi)} \right]_{\xi=0}^{(n-1)}, \quad b(\xi) := \xi^k - \varepsilon^k.$$

Выбирая необходимую нормировку для многочленов Эрмита и учитывая равенства $b'(0) = b''(0) = \dots = b^{(n-1)}(0) = 0$, отсюда находим, что

$$A_n^0(z) = z^{n-1} : z_j^0(\varepsilon) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n-1.$$

Таким образом, для любого сколь угодно большого k нижняя оценка для модулей нулей многочлена A_n^0 при $2 \leq n \leq k$ является тривиальной.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] K. Mahler, “Perfect systems”, *Compositio Math.*, **19** (1968), 95–166.
- [2] A. I. Aptekarev, H. Stahl, “Asymptotics of Hermite–Padé polynomials”, *Progress in Approximation Theory*, Springer Ser. Comput. Math., **19**, Springer, New York, 1992.
- [3] C. Hermite, “Sur la fonction exponentielle”, *C. R. Akad. Sci. (Paris)*, **77** (1873), 18–24, 74–79, 226–233, 285–293.
- [4] Ф. Клейн, *Элементарная математика с точки зрения высшей*. Т. 1. Арифметика. Алгебра. Анализ, Наука, М., 1987.
- [5] А. И. Аптекарев, “О сходимости рациональных аппроксимаций к набору экспонент”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 1981, № 1, 68–74.
- [6] H. Padé, “Mémoire sur les développements en fractions continues de la fonction exponentielle, pouvant servir d’introduction à la théorie des fractions continues algébriques”, *Ann. École Norm. Sup. Paris* (3), **16** (1899), 395–426.
- [7] C. Hermite, “Sur la généralisation des fractions continues algébriques”, *Ann. Math. Pura. Appl. Ser. 2A*, **21** (1883), 289–308.
- [8] K. Mahler, “Zur Approximation der Exponentialfunktion und des Logarithmus. I”, *J. Reine Angew. Math.*, **166** (1931), 118–136; “Zur Approximation der Exponentialfunktion und des Logarithmus. II”, *J. Reine Angew. Math.*, **166** (1932), 137–150.
- [9] K. Mahler, “Applications of some formulas by Hermite to the approximation of exponentials and logarithms”, *Math. Ann.*, **168** (1967), 200–227.
- [10] Е. М. Никишин, В. Н. Сорокин, *Рациональные аппроксимации и ортогональность*, Наука, М., 1988.
- [11] А. И. Аптекарев, В. И. Буслаев, А. Мартинес-Финкельштейн, С. П. Суетин, “Аппроксимации Паде, непрерывные дроби и ортогональные многочлены”, *УМН*, **66**:6 (2011), 37–122.

- [12] J. P. Boyd, “Chebyshev expansion on intervals with branch points with application to the root of Kepler’s equation: a Chebyshev–Hermite–Padé method”, *J. Comput. Appl. Math.*, **223**:2 (2009), 693–702.
- [13] B. Beckermann, V. Kalyagin, A. C. Matos, F. Wielonsky, “How well does the Hermite–Padé approximation smooth the Gibbs phenomenon?”, *Math. Comp.*, **80**:274 (2011), 931–958.
- [14] В. Н. Сорокин, “Циклические графы и теорема Апери”, *УМН*, **57**:3 (2002), 99–134.
- [15] W. Van Assche, “Multiple orthogonal polynomials, irrationality and transcendence”, *Continued Fractions: From Analytic Number Theory to Constructive Approximation*, Contemp. Math., **236**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999, 325–342.
- [16] G. V. Chudnovsky, “Hermite–Padé approximations to exponential functions and elementary estimates of the measure of irrationality of π ”, *The Riemann Problem, Complete Integrability and Arithmetic Applications*, Lecture Notes in Math., **925**, Springer-Verlag, Berlin, 1982, 299–322.
- [17] *Рациональные приближения постоянной Эйлера и рекуррентные соотношения*, Совр. пробл. матем., **9**, ред. А. И. Аптекарев, МИАН, М., 2007.
- [18] В. А. Калягин, “Аппроксимации Эрмита–Паде и спектральный анализ несимметричных операторов”, *Матем. сб.*, **185**:6 (1994), 79–100.
- [19] A. I. Aptekarev, V. A. Kalyagin, E. B. Saff, “Higher-order three-term recurrences and asymptotics of multiple orthogonal polynomials”, *Constr. Approx.*, **30**:2 (2009), 175–223.
- [20] A. I. Aptekarev, P. M. Bleher, A. B. J. Kuijlaars, “Large n limit of Gaussian random matrices with external source, Part II”, *Comm. Math. Phys.*, **259**:2 (2005), 367–389.
- [21] А. И. Аптекарев, В. Г. Лысов, Д. Н. Туляков, “Глобальный режим распределения собственных значений случайных матриц с ангармоническим потенциалом и внешним источником”, *ТМФ*, **159**:1 (2009), 34–57.
- [22] А. И. Аптекарев, В. Г. Лысов, Д. Н. Туляков, “Случайные матрицы с внешним источником и асимптотика совместно ортогональных многочленов”, *Матем. сб.*, **202**:2 (2011), 3–56.
- [23] G. Szegő, “Über einige Eigenschaften der Exponentialreihe”, *Sitzungsber. Berl. Math. Ges.*, **23** (1924), 50–64.
- [24] E. B. Saff, R. S. Varga, “On the zeros and poles of Padé approximations to e^z , II”, *Padé and Rational Approximations*, Academic Press, New York, 1977, 195–213.
- [25] F. Wielonsky, “Asymptotics of Diagonal Hermite–Padé Approximants to e^z ”, *J. Approx. Theory*, **90**:2 (1997), 283–298.
- [26] H. Stahl, “Asymptotics for quadratic Hermite–Padé polynomials associated with the exponential function”, *Electron. Trans. Numer. Anal.*, 2002, № 14, 195–220.
- [27] H. Stahl, “Asymptotic distributions of zeros of quadratic Hermite–Padé polynomials associated with the exponential function”, *Constr. Approx.*, **23**:2 (2006), 121–164.
- [28] A. Kuijlaars, H. Stahl, W. Van Assche, F. Wielonsky, “Asymptotique des approximants de Hermite–Padé quadratiques de la fonction exponentielle et problèmes de Riemann–Hiebert”, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **336**:11 (2003), 893–896.
- [29] A. B. J. Kuijlaars, H. Stahl, W. Van Assche, F. Wielonsky, “Type II Hermite–Padé approximation to the exponential function”, *J. Comput. Appl. Math.*, **207**:2 (2007), 227–244.
- [30] A. B. J. Kuijlaars, W. Van Assche, F. Wielonsky, “Quadratic Hermite–Padé approximation to the exponential function: a Riemann–Hiebert approach”, *Constr. Approx.*, **21**:3 (2005), 351–412.
- [31] P. B. Borwein, “Quadratic Hermite–Padé approximation to the exponential function”, *Constr. Approx.*, **2**:4 (1986), 291–302.
- [32] А. П. Старовойтов, “Эрмитовская аппроксимация двух экспонент”, *Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Информатика*, **13**:1 (2) (2013), 87–91.
- [33] F. Wielonsky, “Some properties of Hermite–Padé approximants to e^z ”, *Continued Fractions: From Analytic Number Theory to Constructive Approximation*, Contemp. Math., **236**, Amer. Math. Soc., Providence RI, 1999, 369–379.

- [34] F. Wielonsky, “Riemann–Hilbert analysis and uniform convergence of rational interpolants to the exponential function”, *J. Approx. Theory*, **131**:1 (2004), 100–148.
- [35] А. П. Прудников, Ю. А. Брычков, О. И. Маричев, *Интегралы и ряды. Элементарные функции*, Наука, М., 1981.
- [36] J. L. Walsh, “On the location of the roots of certain types of polynomials”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **24**:3 (1922), 163–180.
- [37] M. Marden, *Geometry of Polynomials*, Math. Surveys, **3**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1966.

А. П. Старовойтов

Гомельский государственный университет
имени Ф. Скорины, Беларусь
E-mail: svoitov@gsu.by

Поступило

18.02.2015

Исправленный вариант

18.09.2015

Е. П. Кечко

Гомельский государственный университет
имени Ф. Скорины, Беларусь
E-mail: ekechko@gmail.com