Доклады Академии наук СССР
1974. Том 215, № 5

УДК 518:517.948 *МАТЕМАТИКА*

В. В. ВАСИН, В. П. ТАНАНА

НЕОБХОДИМЫЕ И ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ СХОДИМОСТИ ПРОЕКЦИОННЫХ МЕТОДОВ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ НЕУСТОЙЧИВЫХ ЗАДАЧ

(Представлено академиком А. Н. Тихоновым 19 X 1973)

1. Пусть X — линейное нормированное пространство Ефимова — Стечкина ([1], [2]), Y — рефлексивное пространство, $A(T)$ — секвенциально слабо замкнутый оператор с областью определения $D(A)\subseteq X$ $(D(T)\subseteq Y)$ и областью значений $R(A)\subseteq Y$ $(R(T)\subseteq X)$. Рассматривается задача приближенного решения операторного уравнения первого рода

$$Ax=y_0 \tag{1}$$

с разрывным обратным оператором A^{-1} и задача устойчивости вычисления значений неограниченного оператора T ([3], [4]) в точке y_0

$$Ty_0=x, \tag{2}$$

когда элемент y_0 задан δ-приближениями y_δ, $\|y_0-y_\delta\|\leqslant\delta$. Отметим, что существование обратного оператора к T не предполагается, поэтому задача (2), вообще говоря, не сводится к задаче (1), кроме того, этот переход не всегда удобен.

Схема решения задач состоит из двух этапов. Сначала неустойчивые задачи (1) и (2) регуляризуются ([5], [6]) методом невязки ([7], [8]) и нахождение приближенного решения сводится к решению задач на условный экстремум, к которым затем применяется проекционный метод. В связи с этим возникает важный вопрос нахождения условий на конечномерные подпространства, гарантирующих разрешимость конечномерной задачи и устойчивость конечномерных аппроксимаций.

Подобная методика для уравнения (1) применительно к методу квазирешений В. К. Иванова использовалась в ([9], [10]), к методу регуляризации ([6], [5]) А. Н. Тихонова — в ([2], [11], [12]), к методу невязки — в ([2], [13]). В этих работах были найдены некоторые достаточные условия на семейство конечномерных подпространств, обеспечивающие разрешимость и устойчивость соответствующих конечномерных задач.

В настоящей работе полностью решается вопрос об условиях (необходимых и достаточных) на системы конечномерных подпространств в классе линейных неустойчивых задач (1), (2), когда регуляризующий алгоритм ([6]) строится с помощью метода невязки.

2. Метод невязки для операторного уравнения (1) заключается в решении экстремальной задачи

$$\inf\{\|x\|/x\in D(A),\ \|Ax-y_\delta\|\leqslant\delta\}. \tag{3}$$

Условия п. 1 на пространства X, Y и оператор A обеспечивают разрешимость задачи (3), а в случае дополнительного требования строгой выпуклости пространства X, линейности A — и единственность экстремального элемента (см. ([2], [14])).

Теорема 1. *Множество экстремальных элементов X_δ в задаче* (3) *β-сходится к множеству решений X_0 операторного уравнения* (1), *т. е.*

$$\beta(X_\delta, X_0) = \sup_{y\in X_\delta} \inf_{x\in X_0} \|y-x\| \to 0 \quad \text{при} \quad \delta\to 0.$$

Пусть в пространстве $X(Y)$ задана последовательность конечномерных подпространств X_n (Y_n) и проекционных операторов P_n (Q_n) таких, что

а) $P_nX=X_n$ $(Q_nY=Y_n)$,

б) $\|x-P_nx\|\to 0$ $(\|y-Q_ny\|\to 0)$ при $n\to\infty$,

в) $P_n(Q_n)$ — линейные операторы с $\|P_n\|\leqslant 1$ $(\|Q_n\|\leqslant 1)$ и $P_mP_n=P_m$ $(Q_mQ_n=Q_m)$ при $n\geqslant m$.

Примером такого семейства может служить семейство операторов метрического проектирования в гильбертовом пространстве X на цепочку конечномерных подпространств $X_1\subseteq X_2\subseteq\ldots\subseteq X_n\subseteq X$.

Задаче (3) поставим в соответствие конечномерную задачу

$$\inf\{\|x\| \mid x\in(D(A)\cap P_nX), \ \ \|Ax-y_\delta\leqslant\delta\}. \tag{4}$$

Пусть оператор A линеен и существует A^{-1}, а пространство X строго выпукло; эти условия обеспечивают единственность решения задач (1), (3), (4). Будем предполагать также, что проекторы P_n удовлетворяют условиям а), б). Обозначим решения задачи (4) через X_δ^n.

Теорема 2. *Для того чтобы $\forall y_0\in R(A)$ и $\forall y_\delta\in Y$, $\|y_0-y_\delta\|\leqslant\delta$, задача* (4) *была разрешима при $n\geqslant N$ и имела место сходимость $\|X_\delta^n-X_\delta\|\to 0$ при $n\to\infty$, необходимо и достаточно, чтобы множество $\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty}(X_n\cap D(A))}$ было всюду плотно в $D(A)$ относительно топологии, определяемой A-нормой: $\|x\|_A=\|x\|+\|Ax\|$.*

Рассмотрим вторую схему проекционного метода в той форме, в какой он применялся для нелинейных операторных уравнений первого рода в работе [12]. Задача (3) заменяется следующей экстремальной задачей:

$$\inf\{\|x\| \mid x\in(D(A)\cap P_nX), \ \ \|Q_mAx-Q_my_\delta\|\leqslant\delta\}. \tag{5}$$

Предполагается, что проекторы удовлетворяют свойствам а) — в), тогда в условиях предыдущей теоремы справедлива

Теорема 3. *Для того чтобы $\forall y_0\in R(A)$ и $\forall y_\delta\in Y$, $\|y_0-y_\delta\|\leqslant\delta$, существовало такое N, что при $n\geqslant N$ и $\forall m$ задача* (5) *была разрешима и имела место сходимость $\|X^{n,m}_\delta - X_\delta\|\to 0$ при n, $m\to\infty$, необходимо и достаточно, чтобы $\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty}(X_n\cap D(A))}=D(A)$, где замыкание понимается по A-норме, а $X^{n,m}_\delta$ — экстремальный элемент в задаче* (5).

3. Регуляризованное семейство приближенных решений в задаче (2) вычисления значений неограниченного оператора будем находить из решения следующей задачи на экстремум (метод невязки, стр. [3]):

$$\inf\{\|Ty\| \mid y\in D(T), \ \ \|y-y_\delta\|\leqslant\delta\}. \tag{6}$$

Теорема 4. *При выполнении условий п.* 1 *задача* (6) *разрешима и $\limsup_{\delta\to 0}\sup_{y\in\hat{Y}_\delta}\|Ty-x_0\|=0$, где $Ty_0=x_0$, а $\hat{Y}_\delta$ — множество экстремальных элементов в* (6) *при заданном y_δ.*

Наряду с экстремальной задачей (6) рассмотрим ее конечномерный аналог в форме

$$\inf\{\|Ty\| \mid y\in(D(T)\cap Q_nY), \ \ \|y-Q_ny_\delta\|\leqslant\delta\}. \tag{7}$$

Теорема 5. *Пусть T линеен, пространство X строго выпукло, а семейство $\{Q_n\}$ удовлетворяет свойствам* а), б).

Для того чтобы $\forall y_0 \in D(T)$, $y_\delta \in Y$, $\|y_0 - y_\delta\| \leqslant \delta$, *задача* (7) *была разрешима при* $n \geqslant N$ *и имела место сходимость* $\|T\hat{y}_\delta^n - T\hat{y}_\delta\| \to 0$ *при* $n \to \infty$, *необходимо и достаточно, чтобы* $\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} (Y_n \cap D(T))} = D(T)$ *в топологии, определяемой* T*-нормой* $\|y\|_T = \|y\| + \|Ty\|$; *здесь* $\hat{y}_\delta$, $\hat{y}_\delta^n$ — *решения задач* (6), (7) *соответственно.*

В заключение отметим, что если X и Y — сепарабельные B-пространства, а A — линейный (слабо) замкнутый оператор с $D(A) \subseteq X$ и $R(A) \subseteq Y$, то всегда существует цепочка конечномерных подпространств $X_1 \subseteq X_2 \subseteq \ldots \subseteq X_n \subseteq X$, всюду плотная в $D(A)$ относительно A-нормы.

Институт математики и механики
Уральского научного центра Академии наук СССР
Уральский государственный университет
им. А. М. Горького
Свердловск

Поступило
30 VII 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *I. Singer*, Rev. roumaine math. pures et appl., v. 9, № 2 (1964). [2] *В. В. Васин, В. П. Танана*, Матем. зап., Уральск. унив., т. 6, тетр. 2 (1968). [3] *В. А. Морозов*, ДАН, т. 185, № 2 (1969). [4] *Ю. Т. Анохин*, Дифференциальные уравнения, т. 3, № 7 (1967). [5] *А. Н. Тихонов*, ДАН, т. 151, № 3 (1963). [6] *А. Н. Тихонов*, ДАН, т. 153, № 1 (1963). [7] *D. L. Phillips*, J. Assoc. Comp. Machinery, v. 9, № 1 (1962). [8] *В. К. Иванов*, Журн. вычислит. матем и матем. физ., т. 6, № 6 (1966). [9] *В. К. Иванов*, ДАН, т. 142, № 5 (1962). [10] *И. Н. Домбровская, В. К. Иванов*, Изв. высш. учебн. завед., Матем., № 4 (1964). [11] *В. В. Иванов, В. Ю. Кудринский*, Журн. вычислит. матем и матем. физ., т. 1, 11; т. 6, № 5 (1966); т. 7, № 3 (1967). [12] *В. В. Васин*, Там же, т. 12, № 2 (1972). [13] *В. В. Васин*, Изв. высш. учебн. завед., Матем., № 11 (1971). [14] *В. А. Морозов*, Дифференциальные уравнения, т. 6, № 8 (1970).