Доклады Академии наук СССР
1974. Том 215, № 5

УДК 519.48:517:513.88 *МАТЕМАТИКА*

Ю. М. ВУВУНИКЯН

ЭВОЛЮЦИОННЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ АЛГЕБР S_α

(*Представлено академиком С. Л. Соболевым 23 X 1973*)

1. Настоящая заметка посвящена представлениям сверточных алгебр S_α ([1]) в локально-выпуклом пространстве, носители которых содержатся в $R_+=[0, +\infty)$. Ввиду их связи с эволюционными уравнениями мы называем такие представления эволюционными.

Эволюционные представления алгебры K всех бесконечно дифференцируемых функций в банаховом пространстве были, по существу, впервые рассмотрены Ж. Л. Лионсом ([2]). В той же работе он доказал теорему порождения для «полугруппы – распределения экспоненциального роста», которую, не уменьшая общности, можно рассматривать как эволюционное представление алгебры S быстро убывающих бесконечно дифференцируемых функций. Окончательно же вопрос о порождении эволюционного представления алгебры K в банаховом пространстве был решен Ж. Шазареном ([3]).

В работе ([4]) была доказана теорема порождения эволюционных представлений алгебры K в случае локально-выпуклого пространства, а затем ([5], [6]) получены различные критерий гладкости и аналитичности этих представлений в терминах оценки «резольвентной последовательности» в «допустимых» областях комплексного переменного.

Но к вопросу о свойствах представлений, в особенности в связи с задачами Коши в локально-выпуклых пространствах, естественно возникает и другой подход, а именно: исследование возможности распространения представления алгебры K до (непрерывного) представления алгебры S_α, что и приводит к задаче о нахождении необходимых и достаточных условий порождения представлений алгебр S_α в локально-выпуклом пространстве.

2. Пусть $L(X)$ — алгебра эндоморфизмов локально-выпуклого пространства X, снабженная сильной топологией.

Гомоморфизм T алгебры * S_α в $L(X)$, носитель ** которого содержится в R_+, будем называть **эволюционным представлением алгебры** S_α в пространстве X, или ради кратности, просто S_α-**представлением**.

Будем в дальнейшем предполагать, что X бочечно и квазиполно.

Обозначим через S_α^+ подпространство функций из S_α, носители которых содержатся в $R^+=(0, +\infty)$, и T_+ — сужение T на S_α^+.

Одним из основных понятий теории представлений является понятие инфинитезимального или производящего оператора.

Пусть D — множество таких элементов x из X, для которых найдется такой $y\in X$, что $T_+'x=T_+y$ ***. Ясно, что такой y единственный тогда и только тогда, когда представление T удовлетворяет условию:

$$\text{из} \quad T_+y=0 \quad \text{следует} \quad y=0, \quad \text{т. е.} \quad \operatorname{Ker} T_+=\{0\}. \qquad (1)$$

* Произведение в S_α – свертка.

** Определяемый обычным способом, т. е. как дополнение наибольшего открытого множества такого, что для любой функции φ из S_α, носитель которой содержится в этом открытом множестве, $T(\varphi)=0$.

*** Производная понимается здесь в смысле обобщенных функций.

Для представления T, удовлетворяющего этому условию, определим производящий оператор A на D: $Ax=y$. Легко показать, что A — замкнутый линейный оператор.

Пусть выполнено следующее:

$$\operatorname{Im} T_+ = T(S_\alpha{}^+)X \quad \text{плотно в} \quad X. \tag{2}$$

Тогда, как нетрудно показать, D плотно в X и, более того, пересечение D^∞ областей определения всех степеней производящего оператора плотно в X.

Не уменьшая общности, будем предполагать, что условия (1) и (2) выполнены, иначе мы рассмотрели бы индуцированное фактор-представление на $\overline{\operatorname{Im} T_+}/\operatorname{Ker} T_+$.

Будем в дальнейшем предполагать также, что T удовлетворяет следующему условию регулярности:

$T\cdot x$ — локально интегрируемая функция для любого $x\in\operatorname{Im} T_+$.

3. Перейдем теперь к рассмотрению вопросов порождения S_α-представлений. В этом пункте мы рассмотрим случай $\alpha\geqslant 1$.

Пусть A — замкнутый линейный оператор: $X\mapsto X$ с плотной в X областью определения. Будем говорить, что A порождает S_α-представление T, если A — производящий оператор этого представления.

$L(X)$-значную функцию G будем называть полиномиальной в области Λ комплексного переменного, если для любой полунормы p (на X) существуют полином P с неотрицательными коэффициентами и полунорма q, что

$$p(G(\lambda)x)\leqslant P(|\lambda|)\cdot q(x), \qquad x\in X;\ \lambda\in\Lambda.$$

Теорема 1. *Чтобы оператор A порождал S_1-представление, необходимо и достаточно выполнения следующих условий*:

1) *в полуплоскости $\Pi_0=\{\lambda\,|\,\operatorname{Re}\lambda>0\}$ оператор A имеет резольвенту R;*

2) *для любого $\varepsilon>0$ функция R полиномиальна в полуплоскости $\Pi_\varepsilon=\{\lambda\,|\,\operatorname{Re}\lambda>\varepsilon\}$.*

Теорема 2. *Пусть $1<\alpha<+\infty$. Чтобы оператор A порождал S_α-представление, необходимо и достаточно выполнения условий* 1 *и*

2а) *для любого $\varepsilon>0$ функция $\lambda\mapsto\exp[-\varepsilon(\operatorname{Re}\lambda)^{1/(1-\alpha)}]\cdot R(\lambda)$ полиномиальна в полуплоскости Π_0.*

Теорема 3. *Чтобы оператор A порождал S_∞-представление* (т. е. *S-представление*), *необходимо и достаточно, чтобы резольвента оператора A была бы полиномиальна в полуплоскости Π_0.*

4. При $\alpha<1$ производящий оператор S_α-представления в локально-выпуклом пространстве, вообще говоря, может не иметь резольвенты ни в одной точке, поэтому для характеризации представлений этих алгебр введем понятия квазирезольвенты и резольвентной последовательности оператора A.

Определение 1. Ненулевая $L(X, D)$-значная * функция G называется квазирезольвентой оператора A в области Λ, если она удовлетворяет следующим условиям:

$$AR(\lambda)x=R(\lambda)Ax, \qquad \lambda\in\Lambda, \qquad x\in D; \tag{3}$$

$$R(\lambda)R(\mu)=R(\mu)R(\lambda), \qquad \lambda,\ \mu\in\Lambda. \tag{4}$$

Обозначим $A(\lambda)=\lambda I-A$ и $H(\lambda)=A(\lambda)R(\lambda)-I$.

$L(X)$-значная функция H является «функцией дефекта» квазирезольвенты R в области Λ. Так как у производящего оператора представления бесконечно много квазирезольвент, то при помощи функции H можно будет судить о степени близости квазирезольвенты к ее идеалу — резольвенте — хотя последняя может и не существовать.

---

* D снабжается топологией графика оператора A.

Нетрудно проверить, что H удовлетворяет следующим соотношениям:

$$H(\lambda)H(\mu)=H(\mu)H(\lambda); \tag{5}$$

$$H(\lambda)R(\mu)=R(\mu)H(\lambda); \tag{6}$$

$$R(\lambda)-R(\mu)=\begin{vmatrix} R(\lambda) & \lambda R(\lambda)-H(\lambda) \\ R(\mu) & \mu R(\mu)-H(\mu) \end{vmatrix} \tag{7}$$

для любых $\lambda, \mu \in \Lambda$.

Последнее соотношение обобщает известное тождество Гильберта для резольвенты. Из (7), в частности, следует, что сильная аналитичность квазирезольвенты влечет сильную аналитичность функции H и следующее соотношение между их производными:

$$(I+H(\lambda))R'(\lambda)=R(\lambda)(H'(\lambda)-R(\lambda)), \quad \lambda\in\Lambda.$$

Говоря о квазирезольвенте, всегда будем предполагать, что она сильно аналитична в своей области определения, а саму эту область называть допустимой областью квазирезольвенты.

Определение 2. Последовательность (R_n) квазирезольвент оператора A называется его резольвентной последовательностью, а пересечение допустимых областей квазирезольвент R_n — допустимой областью резольвентной последовательности (R_n).

Резольвентную последовательность (R_n) будем называть резольвентной последовательностью типа α, если

1) полуплоскость Π_0 является допустимой областью;

2) существует такая неограниченно возрастающая числовая последовательность (a_n), что каждая функция $\lambda\mapsto\exp[a_n(\operatorname{Re}\lambda)^{1/(1-\alpha)}]\cdot H_n(\lambda)$, $n=1, 2, 3, \ldots$, где H_n — дефект квазирезольвенты, полиномиальна в Π_0.

В терминах резольвентной последовательности типа α мы можем сформулировать теперь критерии порождения представлений алгебр S_α при $\alpha<1$.

Теорема 4. *Пусть* $0\leqslant\alpha<1$. *Чтобы оператор A порождал S_α-представление, необходимо и достаточно выполнения следующих условий:*

1) *существует резольвентная последовательность (R_n) типа α оператора A;*

2) *Функции R_n, $n=1, 2, 3, \ldots$, полиномиальны в полуплоскости* Π_0.

Заметим, что при $\alpha=0$, мы получаем теорему порождения K-представлений, которая в несколько иных терминах была сформулирована и доказана в работе (4).

Институт математики
Сибирского отделения Академии наук СССР
Новосибирск

Поступило
11 X 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов,* Обобщенные функции, т. 2, Пространства основных и обобщенных функций, М., 1958. [2] *J. L. Lions,* Portugal. Math., v. 19, 141 (1960). [3] *J. Chazarain, C. R.,* Ser. A., v. 266, № 1, 10 (1968). [4] *Ю. М. Вувуникян,* ДАН, т. 198, № 2, 269 (1971). [5] *Ю. М. Вувуникян,* ДАН, т. 203, № 2, 270 (1972). [6] *Ю. М. Вувуникян,* Тр. н.-и. инст. матем. Воронежск. унив., в. 3, 11 (1972).