Доклады Академии наук СССР
1974. Том 216, № 4

УДК 513.88 *МАТЕМАТИКА*

В. И. ЛОМОНОСОВ, Ю. И. ЛЮБИЧ, В. И. МАЦАЕВ

ДВОЙСТВЕННОСТЬ СПЕКТРАЛЬНЫХ ПОДПРОСТРАНСТВ И УСЛОВИЯ ОТДЕЛИМОСТИ СПЕКТРА ОГРАНИЧЕННОГО ЛИНЕЙНОГО ОПЕРАТОРА

(Представлено академиком В. И. Смирновым 13 XII 1973)

Рассмотрим в комплексном банаховом пространстве $\mathfrak{B}$ произвольный линейный ограниченный оператор T. Обозначим его спектр через $\sigma(T)$. Для любого компакта $Q\subset\sigma(T)$ назовем подпространство $L(Q)\subset\mathfrak{B}$ спектральным для T (ср. [1]), если оно инвариантно относительно T, удовлетворяет условию $\operatorname{int} Q\subset\sigma(T|L(Q))\subset Q$ ($\operatorname{int} Q$ — внутренность множества Q в топологии, индуцированной в $\sigma(T)$ из $\mathbf{C}$) и является наибольшим среди таких инвариантных подпространств L, для которых $\sigma(T|L)\subset Q$.

Имеется несколько различных конструкций спектральных подпространств при условиях типа неквазианалитичности (по поводу сравнения этих конструкций см., например, [2]), а при отказе от таких условий может вовсе не быть спектральных подпространств с $Q\neq\sigma(T)$ [1]. Если для каждого Q существует спектральное подпространство $L(Q)$ и для каждого семейства $\{Q_\alpha\}$ такого, что $\bigcup\operatorname{int} Q_\alpha=\sigma(T)$, система спектральных подпространств $L(Q_\alpha)$ полна, то T называется оператором с отделимым спектром.

Э. Бишоп [3] провел глубокое исследование свойств спектральных подпространств в плане двойственности между T и T^*. Один из основных его результатов (теорема 2) относится к произвольному оператору, в ряде других теорем фигурирует некоторое «условие β» или его эффективное усиление: функция $\|R_\lambda\|$ (где, как обычно, $R_\lambda=(T-\lambda I)^{-1}$) является «модулем контроля для аналитических функций», или, как мы будем эквивалентным образом говорить ниже,— «аналитической мажорантой». Важно, что условие β допускает в качестве спектра любой компакт в $\mathbf{C}$ (в частности, ему удовлетворяют все нормальные операторы).

В излагаемой работе мы, следуя подходу Бишопа, но несколько модифицируя его аппарат, получаем теорему двойственности для произвольного оператора при более слабом требовании на покрытие спектра, чем в [3]. Это дает возможность разделять спектр на стыке двух кусков при выполнении соответствующей локальной формы условия β (обсуждение этой ранее нерешенной задачи см. в [4]). Глобальное выполнение условия β обеспечивает глобальную отделимость спектра. Этим дается положительный ответ на вопрос, заданный нам М. Г. Крейном и И. Ц. Гохбергом.

Условие β можно сформулировать так: для любого открытого множества G и любого компакта $K\subset G$ выполняется неравенство

$$\sup_K\|f(\lambda)\|\leqslant M_{G,K}\sup_G\|(T-\lambda I)f(\lambda)\| \tag{1}$$

на классе функций $f(\lambda)$ со значениями в $\mathfrak{B}$, голоморфных при $\lambda\in G$. В локальной форме условия β множество G фиксируется, а само условие обозначается через β_F, где $F=\mathbf{C}\setminus G$.

Условие аналитической мажорантности состоит в том, что на упомянутом классе голоморфных функций неравенство

$$\|f(\lambda)\|\leqslant\|R_\lambda\|,\quad \lambda\in G\setminus\sigma(T), \tag{2}$$

влечет равномерную ограниченность $\|f(\lambda)\|$ на каждом компакте $K\subset G$. Для этого необходимо, чтобы в дополнении $G\setminus K_0$ некоторого компакта $K_0\subset G$ спектр $\sigma(T)$ был нигде не плотен. Таким образом, условие аналитической мажорантности ограничивает топологию спектра. В случае, когда $\operatorname{mes}\sigma(T)=0$, для аналитической мажорантности достаточно, чтобы

$$\int\limits_0 (t^{-1}\ln\ln\rho(t))^{1/2}dt<\infty, \tag{3}$$

где $\rho(t)$ — функция, обратная к $\mu(t)=\operatorname{mes}\{\lambda\colon \lambda\in\mathbf{C}\setminus\sigma(T),\ \|R_\lambda\|>t\}$, $t>0$. В случае спектра на гладкой кривой условие (3), в свою очередь, обеспечивается «условием Левинсона», фигурирующим в (1).

Введем «предспектральные» подпространства. Пусть $F\subset\mathbf{C}$ — компакт, $G=\mathbf{C}\setminus F$. Следуя (3), обозначим через $M(F,T)$ замыкание множества тех $x\in\mathfrak{B}$, для которых уравнение $(T-\lambda I)f(\lambda)=x$ имеет решение $f(\lambda)$, голоморфное в G. Аналогично определяется $M(F,T^*)$ в пространстве антилинейных функционалов $\mathfrak{B}^*$, но замыкание берется в w^*-топологии (эта модификация в (3) отсутствует, так как там $\mathfrak{B}$ рефлексивно). Рассмотрим далее пространство функций со значениями в $\mathfrak{B}$, голоморфных и ограниченных в G, наделенное топологией равномерной сходимости. Возьмем в этом пространстве линеал функций вида $(T-\lambda I)f(\lambda)$, где $f(\lambda)$ голоморфна (но не обязательно ограничена) в G. Обозначим через $N(F,T)$ множество тех $x\in\mathfrak{B}$, которые принадлежат (как функции-константы) замыканию указанного линеала, т. е.

$$N(F,T)=\{x\colon \underline{\forall}\ \varepsilon>0,\ \underline{\exists}\ f\ (\|(T-\lambda I)f(\lambda)-x\|<\varepsilon)\}$$

(см. (3)). Аналогично определяется $N(F,T^*)$ в $\mathfrak{B}^*$, но замыкание берется в топологии, задаваемой системой окрестностей нуля:

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty}(x_k, f(\lambda_k))\right|<\varepsilon,$$

где $\varepsilon>0$, $\{\lambda_k\}$ — произвольная последовательность точек из $G\cup\{\infty\}$, $\{x_k\}$ — произвольная последовательность векторов такая, что

$$\sum_{k=1}^{\infty}\|x_k\|<\infty.$$

Теорема 1 (о двойственности). *Пусть T — произвольный (ограниченный) оператор. Пусть F_1, F_2 — такие компакты в $\mathbf{C}$, что*

$$\sigma_T\subset\operatorname{Int}F_1\cup F_2, \tag{4}$$

где $\operatorname{Int}F_1$ — внутренность множества F_1 в топологии всего $\mathbf{C}$. Пусть, наконец, $K_1, K_2\subset\mathbf{C}$ — непересекающиеся компакты. Тогда

$$N(F_1,T)^\perp\subset M(F_2^*,T^*),\ M(F_2,T)^\perp\subset N(F_1^*,T^*), \tag{5}$$

$$M(K_1,T)^\perp\supset N(K_2^*,T^*),\ \ N(K_1,T)^\perp\supset M(K_2^*,T^*). \tag{6}$$

У Бишопа (3) требуется, вместо (4), чтобы $\sigma(T)\subset\operatorname{Int}F_1\cup\operatorname{Int}F_2$. Это препятствует решению задачи о локальной отделимости спектра, в то время как на основе теоремы 1 получается

Теорема 2 (о разрезании спектра по общей границе двух кусков). *Пусть $\sigma(T)=Q_1\cup Q_2$, где Q_1, Q_2 — компакты, причем один из них, например, Q_2 является замыканием своей внутренности $\operatorname{int}Q_2$ относительно спектра $\sigma(T)$. Пусть, далее, существует в $\mathbf{C}$ такой компакт Q, что $\operatorname{int}Q_2\subset\operatorname{Int}Q$ и $Q\cap\sigma(T)=Q_2$. Если оператор T удовлетворяет условию β_{Q_1}, а сопряженный оператор T^* — условию β_{Q^*}, то существует спектральное под-*

пространство $L(Q_1)$ для T, а для фактор-оператора T, индуцированного T на $\mathfrak{B}/L(Q_1)$, существует подпространство $\Lambda(Q_2)$, обладающее всеми свойствами спектрального подпространства, кроме, быть может, максимальности.

В связи с теоремой 2 отметим, что если для некоторого компакта $K\subset\sigma(T)$ спектральное подпространство $L(K)$ существует и если выполнено условие β_K, то

$$L(K)=N(K, T)=M(K, T)=\{x:\ x=(T-\lambda I)f(\lambda)\}, \tag{7}$$

где $f(\lambda)$ голоморфны вне K. Аналогичное утверждение справедливо для T^*.

Глобальное условие β, как мы уже отмечали, влечет глобальную отделимость спектра. Точнее говоря, справедлива

Теорема 3 (об отделимости спектра). *Пусть каждый из операторов T, T^* удовлетворяет условию β. Тогда T — оператор с отделимым спектром. В частности, для каждого семейства компактов $Q_\alpha\subset\sigma(T)$, $\alpha=1,\dots,n$, такого, что $\bigcup \mathrm{int}\, Q_\alpha=\sigma(T)$, соответствующая система спектральных подпространств $L(Q_\alpha)$ полна.*

Последнее свойство можно существенно усилить при условии аналитической мажорантности.

Теорема 4 (о разложении единицы). *Пусть оператор T удовлетворяет условию аналитической мажорантности и $Q_\alpha\subset\sigma(T)$, $\alpha=1,\dots,n$, — такие компакты, что $\bigcup \mathrm{int}\, Q_\alpha=\sigma(T)$. Тогда существуют такие операторы I_α $(\alpha=1,\dots,n)$, что $\mathrm{Im}\, I_\alpha\subset L(Q_\alpha)$ и $\sum\limits_\alpha I_\alpha=I$.*

Операторы I_α строятся в равномерно замкнутой алгебре, порождаемой рациональными функциями от T. При этом, если $Q_\alpha\cap Q_\gamma=\emptyset$, то $\mathrm{Ker}\, I_\gamma\supset\supset L(Q_\alpha)$.

Харьковский государственный университет
им. А. М. Горького

Поступило
19 XI 1973

Институт химической физики
Академии наук СССР
Москва

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *Ю. И. Любич, В. И. Мацаев*, Матем. сборн., т. 56, 433 (1962). [2] *Г. М. Фельдман*, Матем. физика и функц. анализ, в. III, Харьков, 1972, стр. 81. [3] *E. Bishop*, Pacif. J. Math., v. 9, № 2, 379 (1959). [4] *J. Stampfli*, Math. J. Ind. Univ., v. 22, № 2 (1972).