Доклады Академии наук СССР
1974. Том 215, № 5

УДК 519.21 *МАТЕМАТИКА*

В. Л. ГИРКО

ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ СОБСТВЕННЫХ ЧИСЕЛ СЛУЧАЙНЫХ МАТРИЦ

(*Представлено академиком В. М. Глушковым 21 IX 1973*)

Совместные функции распределения собственных чисел случайных матриц в настоящее время известны в довольно частном случае, когда элементы матрицы распределены одинаково по нормальному закону (см., например, ([1], [2])). Отметим, что во многих задачах теоретического и прикладного характера нужно знать распределение собственных чисел случайных матриц большого порядка, поэтому представляет интерес изучение предельного распределения собственных чисел при росте порядка матрицы к бесконечности. Учитывая сказанное, постановку задачи можно сформулировать следующим образом: найти условия сходимости, а также общий вид предельных распределений для последовательностей случайных величин

$$\frac{\lambda_{k_1 n}-a_n}{b_n},\quad \frac{\lambda_{k_2 n}-a_n}{b_n},\ldots,\frac{\lambda_{k_k n}-a_n}{b_n},$$

где $\lambda_{1n}\geqslant\lambda_{2n}\geqslant\ldots\geqslant\lambda_{nn}$ — собственные числа случайной симметричной матрицы A_n n-го порядка, $k_1, k_2, \ldots, k_k$ — произвольные целые числа от 1 до n, a_n, b_n — некоторые постоянные числа.

Пусть $A_n=(\xi_{ij}^{(n)})$ — квадратные матрицы n-го порядка. Упорядочим собственные числа матрицы A_nA_n' в невозрастающем порядке $\lambda_{1n}\geqslant\lambda_{2n}\geqslant\ldots\geqslant\lambda_{nn}$.

Обозначим

$$\lambda_n(x)=\sum_{i=1}^{n}\int_0^x y\,dF(y-\lambda_{in}),$$

где

$$F(x)=\begin{cases}1, & x\geqslant 0,\\ 0, & x<0.\end{cases}$$

Теорема 1. *Если для каждого n случайные элементы $\xi_{ij}^{(n)}$, $i, j=1,\ldots,n$, матрицы A_n независимы, бесконечно малы, $\sup_n \operatorname{Sp} B_nB_n'<\infty$ и*

$$\lim_{c\to\infty}\sup_n P\{\lambda_n(+\infty)\geqslant c\}=0,$$

где

$$B_n=(\alpha_{ij}),\quad \alpha_{ij}=\int_{|x|<\tau} x\,dP\{\xi_{ij}^{(n)}<x\},\quad \tau>0,$$

то $\lambda_n(x)\sim\mu_n(x)$, где $\mu_n(x)$ — неубывающий случайный процесс, преобразование Стильтьеса которого равно

$$\int_0^\infty\frac{d\mu_n(x)}{1+tx}=\frac{d}{dt}\ln[\det(I+t\lambda_{1n})\{I+t\lambda_{2n}+B_n(I+t\lambda_{1n})^{-1}B_n'\}];$$

здесь символ $\lambda_n(x) \sim \mu_n(x)$ означает, что конечномерные распределения $\lambda_n(x)$ сходятся тогда и только тогда, когда сходятся конечномерные распределения $\mu_n(x)$ и их предельные конечномерные распределения совпадают,

$$\lambda_{1n} = \left(\delta_{ij} \sum_{i \in T_{jn}} \nu_{ij}^2\right), \quad \lambda_{2n} = \left(\delta_{ij} \sum_{j \in K_{tn}} \nu_{ij}^2\right),$$

δ_{ij} — символ Кронекера, $t \geqslant 0$, $\nu_{ij} = \xi_{ij} - \alpha_{ij}$.

Множества T_{jn} и K_{jn} в теореме 1 определены следующим образом: множество $\{\xi_{ij},\ i, j=1, \ldots, n\}$ разбивается на $2n$ непересекающихся множеств R_{in}', R_{in}'', $i=1, \ldots, n$, содержащих соответственно элементы только i-й вектор-строки и i-го вектор-столбца матрицы A_n, так чтобы для любого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n \to \infty} \sup_{1 \leqslant j \leqslant n} P\left\{ \sum_{\xi_{ij} \in R_{in}' \cup R_{in}''} (\xi_{ij} - \alpha_{ij})^2 > \varepsilon \right\} = 0.$$

Тогда через T_{jn} обозначим множество значений индекса i величин $\xi_{ij} \in \bigcup_{p=1}^{n} R_{pn}$, у которых второй индекс равен j, а через K_{in} — множество значений индекса j величин $\xi_{ij} \in \bigcup_{p=1}^{n} R_{pn}''$, у которых первый индекс равен i.

Следствие 1. *Пусть для каждого n случайные величины $\xi_{ij}^{(n)}$, $i, j = 1, \ldots, n$, матрицы $A_n = (\xi_{ij}^{(n)})$ независимы,*

$$\lim_{n \to \infty} \sup_{1 \leqslant j \leqslant n} P\left\{ \sum_{i=1}^{n} (\nu_{ij}^2 + \nu_{ji}^2) > \varepsilon \right\} = 0, \quad \lim_{n \to \infty} \operatorname{Sp} B_n B_n' = 0,$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \varliminf_{n \to \infty} \sum_{i,j=1}^{n} \int_{0 < x < \varepsilon} x \, dF_{ij}^{(n)}(x) =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \varlimsup_{n \to \infty} \sum_{i,j=1}^{n} \int_{0 < x < \varepsilon} x \, dF_{ij}^{(n)}(x) = \sigma^2,$$

$$\sum_{i,j=1}^{n} [1 - F_{ij}^{(n)}(z)] \Rightarrow K(z),$$

где $z > 0$, $F_{ij}^{(n)}(z) = P\{\nu_{ij}^2 < z\}$, $K(z)$ — непрерывная и ограниченная функция для всех $z > 0$.

Тогда для всех $k_1 > k_2 \ldots > k_k$, $x_k \geqslant x_{k-1} \geqslant \ldots \geqslant x_1 > 0$

$$\lim_{n \to \infty} P\{\lambda_{k_1 n} < x_1, \lambda_{k_2 n} < x_2, \ldots, \lambda_{k_k n} < x_k\} =$$

$$= (-1)^k [(k_k - 1)!]^{-1} \int_0^{x_1} e^{-K(z_1)} \, dK(z_1) \prod_{i=1}^{k-1} \left\{ [(k_i - k_{i+1} - 1)!]^{-1} \times \right.$$

$$\left. \times \int_{z_i}^{x_{i+1}} [K(z_i) - K(z_{i+1})]^{k_i - k_{i+1} - 1} \, dK(z_{i+1}) \right\} [K(z_k)]^{k_k - 1}.$$

Рассмотрим квадратные матрицы m-го порядка, $C_m=(c_{ij})$

$$C_{ij}=\begin{cases} F_j(z_2)-F_j(z_1), & i=1,\ldots,k_1-k_2-1;\\ F_j(z_{l+2})-F_j(z_{l+1}), & i=k_1-k_{l+1}-l+1,\ldots,k_1-k_{l+2}-l-1,\\ & \qquad l=1,\ldots,k-2;\\ 1-F_j(z_k), & i=k_1-k_k-k+2,\ldots,k_1-k;\\ dF_j(z_i), & i=k_1-k+1,\ldots,k_1;\\ F_j(z_1), & i=k_1+1,\ldots,m. \end{cases}$$

Следствие 2. *Пусть для каждого n случайные элементы $\xi_{ij}^{(n)}$, $i,j=1,\ldots,n$, матрицы A_n независимы, бесконечно малы,*

$$\lim_{c\to\infty}\sup_n P\{\lambda_n(+\infty)\geqslant c\}=0,\quad \lim_{n\to\infty}\operatorname{Sp} B_nB_n'=0,$$

существует такое постоянное число m, что

$$\lim_{n\to\infty}P\left\{\sum_{i\in T_{jn}}\nu_{ij}^2<x_j,\ j=1,\ldots,m\right\}=\prod_{j=1}^{m}F_j(x_j),$$

где $F_j(x)$, $j=1,\ldots,m$,— непрерывные функции распределения, а сумма всех остальных величин среди оставшихся величин

$$\sum_{i\in T_{jn}}\nu_{ij}^2,\quad \sum_{i\in K_{jn}}\nu_{ij}^2,\quad j=1,\ldots,n,$$

стремится по вероятности к нулю.

Тогда

$$\lim_{n\to\infty}P\{\lambda_{k_1n}<x_1,\lambda_{k_2n}<x_2,\ldots,\lambda_{k_kn}<x_k\}=$$

$$=[(m-k_1)!(k_k-1)!]^{-1}\prod_{i=1}^{k-1}[(k_i-k_{i+1}-1)!]^{-1}\int_0^{x_1}\int_{z_1}^{x_2}\ldots\int_{z_{k-1}}^{x_k}\operatorname{per}C_m,$$

где $m\geqslant k_1>k_2>\ldots>k_k$, $0<x_1\leqslant x_2\leqslant\ldots\leqslant x_k$, перманент матрицы C_m

$$\operatorname{per}C_m=\sum_{\langle i_1,\ldots,i_m\rangle}c_{1i_1}c_{2i_2}\ldots c_{mi_m}$$

и сумма берется по всем перестановкам $\langle i_1,\ldots,i_m\rangle$ чисел $1, 2, \ldots, m$.

Киевский государственный университет
им. Т. Г. Шевченко

Поступило
17 IX 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *Т. Андерсон,* Введение в многомерный статистический анализ, М., 1963.
[2] *Ф. Дайсон,* Статистическая теория сложных систем, ИЛ, 1963.