Доклады Академии наук СССР
1974. Том 216, № 4

УДК 551.465.41 *ГЕОФИЗИКА*

Член-корреспондент АН СССР А. С. МОНИН

ОБ АДИАБАТИЧЕСКИХ ВОЗМУЩЕНИЯХ ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ЖИДКОСТИ

Будем рассматривать жидкости, термодинамическое состояние которых определяется тремя независимыми параметрами; в качестве последних изберем давление p, плотность ρ и удельную концентрацию примеси s (например, удельная влажность в атмосферном воздухе или соленость в морской воде).

Назовем *равновесным* состояние жидкости (например, атмосферы или океана на Земле), в котором она вращается с постоянной угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$, а термодинамические параметры меняются лишь по направлению ускорения силы тяжести $\mathbf{g}=-g\nabla r$ (r — расстояние от центра тяжести) и связаны уравнением гидростатики $dp_0/dr=-g\rho_0$ (p_0, ρ_0 — равновесные давление и плотность).

Введем обозначения $\Gamma=ds_0/dr$ для равновесного градиента концентрации примеси и $N^2=-(g/\rho_0)(d\rho_0/dr+g\rho_0/c_0^2)$ для квадрата частоты Вайсала — Брента (c_0 — равновесная скорость звука) и определим равновесную *потенциальную плотность* $\rho_п$ соотношением $\dfrac{g}{\rho_п}\dfrac{d\rho_п}{dr}=-N^2$, причем $\rho_п=\rho_0$ на некотором отсчетном уровне $r=r_0$, например, на уровне моря.

Назовем *адиабатическими* процессы, при которых в каждом жидком объеме сохраняются энтропия и примесь s. Адиабатические малые возмущения скорости и термодинамических параметров $\mathbf{u}$, p, ρ, s будут удовлетворять уравнениям движения, неразрывности и адиабатичности, линеаризованным относительно равновесного состояния:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}+2\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{u}=-\frac{\nabla p}{\rho_0}-\frac{\rho}{\rho_0}\nabla r;\quad \frac{\partial\rho}{\partial t}+u_r\frac{d\rho_0}{dr}=-\rho_0\operatorname{div}\mathbf{u};$$
$$\frac{\partial p}{\partial t}-g\rho_0u_r=c_0^2\left(\frac{\partial\rho}{\partial t}+u_r\frac{d\rho_0}{dr}\right);\quad \frac{\partial s}{\partial t}+\Gamma u_r=0 \tag{1}$$

(индексом r отмечаются вертикальные компоненты векторов).

На ограничивающих жидкость твердых стенках должна обращаться в нуль нормальная компонента скорости u_n. Если у жидкости есть свободная поверхность $r=r_0+\zeta$, где ζ — возмущение ее уровня (например, океан), то при $r=r_0$ должны выполняться линеаризированные кинематическое и динамическое краевые условия $u_r=\partial\zeta/\partial t$ и $\partial p/\partial t-g\rho_0u_r=0$ (поверхностным натяжением и, тем самым, капиллярными волнами здесь пренебрегаем; динамическое условие означает, что на свободной поверхности давление постоянно, т. е. что она свободна от внешних барических воздействий).

Уравнения (1) имеют в общем случае единственный линейный инвариант (т. е. не зависящую от времени комбинацию неизвестных функций)

$$I=g\Gamma(p-c_0^2\rho)-\rho_0c_0^2N^2s. \tag{2}$$

Если $N=\Gamma=0$ (термодинамически *однородное* равновесное состояние), то инвариантны и $p-c_0^2\rho$ и s. Имеются еще краевые инварианты $p-g\rho_0\zeta$ и $\rho_0c_0^2N^2\zeta+g(p-c_0^2\rho)$ при $r=r_0$; на *горизонтальных* твердых стенках инвариантны также $p-c_0^2\rho$ и s. Наконец, интегрированием по объему (ограниченному сверху равновесной свободной поверхностью

$r=r_0$) вытекающего из (1) локального уравнения энергии

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left[\rho_0 u^2+\frac{p^2}{\rho_0 c_0^2}+\frac{g^2(p-c_0^2\rho)^2}{\rho_0 c_0^4 N^2}\right]+\operatorname{div} p\mathbf{u}=0 \qquad (3)$$

убеждаемся в существовании квадратичного интегрального инварианта — полной энергии возмущений

$$E=\frac{1}{2}\int\left[u^2+\frac{p^2}{\rho_0^2 c_0^2}+\frac{g^2(p-c_0^2\rho)^2}{\rho_0^2 c_0^4 N^2}\right]\rho_0\, dV+\frac{1}{2}g\rho_{00}\int\zeta^2\, d\Sigma, \qquad (4)$$

где dV, $d\Sigma$ — элементы объема и горизонтальной площади.

Рассмотрим возможные стационарные возмущения. В них распределение плотности $\rho=-(g\omega_r)^{-1}(\boldsymbol{\omega}\cdot\nabla p)$ негидростатично (оно становится гидростатическим лишь в так называемом традиционном приближении $\boldsymbol{\omega}\approx\omega_r\nabla r$). Если хотя бы одна из величин N и Γ отлична от нуля, то стационарные течения горизонтальны, геострофичны, бездивергентны, возмущения давления не зависят от долготы λ и описываются произвольной функцией $p_s(\theta, r)$ (θ — дополнение широты), течения направлены вдоль кругов широты и имеют скорость $u_\lambda=(2r\rho_0\omega_r)^{-1}\partial p_s/\partial\theta$; такие возмущения возможны лишь в моделях с не меняющимися по долготе твердыми стенками и, следовательно, невозможны в реальном океане и в атмосфере над реальным рельефом (в этих случаях стационарные возмущения должны быть неадиабатическими). Если $N=\Gamma=0$, то возможны еще стационарные течения со скоростями $\mathbf{u}=\dfrac{\nabla r\times\nabla p}{2\rho_0\omega_r}+\dfrac{u_r}{\omega_r}\boldsymbol{\omega}$, удовлетворяющими условиям $u_r=0$ при $r=r_0$ и $u_n=0$ на твердых стенках, причем p и u_r связаны соотношением

$$\frac{\partial p}{\partial\lambda}=2r^2\rho_0\cos^2\theta\left(\operatorname{div}\frac{u_r\boldsymbol{\omega}}{\omega_r}-\frac{gu_r}{c_0^2}\right).$$

Если начальные возмущения (в момент времени $t=0$) адаптированы, т. е. обладают всеми указанными свойствами стационарных возмущений, то они не меняются со временем. В противном случае решение задачи Коши для уравнений (1) наряду со стационарными возмущениями, определяемыми адаптированной частью начальных возмущений (при термодинамически неоднородном равновесном состоянии — средней зональной частью начального поля давления), включает и нестационарные возмущения (с равными нулю линейными инвариантами); последние назовем собственными движениями.

Для полей $\mathbf{u}$ и p собственных движений (просто выражающиеся через них поля ρ и s далее здесь не понадобятся) из (1) операционным методом выводятся уравнения

$$\mathbf{u}+\frac{\mathbf{M}(\nabla P)}{\rho_\text{п} D}=\frac{\mathbf{M}(\mathbf{u}_m)}{D}+g\frac{p_m-c_0^2\rho_m}{2\omega\rho_0 c_0^2}\frac{\mathbf{M}(\nabla r)}{D^2};$$

$$\operatorname{div}\mathbf{u}-\frac{gu_r}{c_0^2}+\frac{4\omega^2 DP}{\rho_\text{п} c_0^2}=\frac{2\omega p_m}{\rho_0 c_0^2}, \qquad (5)$$

где $P=\dfrac{\rho_\text{п} P}{2\omega\rho_0}$, $D=\dfrac{1}{2\omega}\dfrac{\partial}{\partial t}$, индексом m отмечена неадаптированная часть начальных значений и введена свойственная вращающейся жидкости линейная векторная функция

$$\mathbf{M}(\mathbf{A})=\mathbf{L}(\mathbf{A})+Q^{-1}N_0^2 L_r(\mathbf{A})\mathbf{L}(\nabla r),\quad Q=-[D^2+N_0^2 L_r(\nabla r)], \qquad (6)$$
$$\mathbf{L}(\mathbf{A})=(D^2+k^2)^{-1}[D^2\mathbf{A}-D\mathbf{k}\times\mathbf{A}+(\mathbf{k}\cdot\mathbf{A})\mathbf{k}],$$

в которой $N_0=N/(2\omega)$ и $\mathbf{k}=\boldsymbol{\omega}/\omega$ (в традиционном приближении $\mathbf{k}\approx k_r\nabla r$ и $k^2=k_r^2$; при этом $L_r(\nabla r)=1$). Краевое условие при $r=r_0$ получается отбрасыванием $\operatorname{div}\mathbf{u}$ из второго уравнения (5).

Если начальные возмущения сосредоточены лишь в области, не содержащей некоторых границ жидкости, то возникающие собственные движения не будут связаны соответствующими краевыми условиями, пока они не достигнут этих границ. В качестве примера рассмотрим собственные движения при однородном равновесном состоянии ($N=0$, $\mathbf{M}=\mathbf{L}$, $p=c_0^2\rho$), в которых возмущения давления отсутствуют (*инерционные движения*). Согласно (5), они возникают, когда начальные возмущения поля скорости удовлетворяют условию

$$\operatorname{div}\mathbf{L}(\mathbf{u}_m)=\frac{g}{c_0^2}L_r(\mathbf{u}_m), \tag{7}$$

которое вследствие независимости $\mathbf{u}_m$ от D распадается на три: поля $\mathbf{u}_m$, $\mathbf{k}\times\mathbf{u}_m$ и $(\mathbf{k}\cdot\mathbf{u}_m)\mathbf{k}$ должны удовлетворять уравнению $\operatorname{div}\mathbf{A}=gc_0^{-2}A_r$. Неадаптированные поля с такими свойствами должны быть ортогональными $\mathbf{k}$ и потому не могут удовлетворять краевым условиям на произвольных твердых стенках. Таким образом, инерционные движения возможны лишь локально (что объясняет наблюдаемую перемежаемость и быстрое затухание пространственной когерентности инерционных колебаний в океане).

Периодические собственные движения суть *собственные колебания* всего объема жидкости; в них $\mathbf{u}$, p, ρ, s зависят от времени по закону $\exp(2i\omega ft)$ (f — собственные частоты, измеренные в единицах полусуточной частоты 2ω, которые вследствие инвариантности полной энергии (4) вещественны) и должны удовлетворять всем краевым условиям. Уравнения для комплексных амплитуд собственных колебаний $\mathbf{u}$ и P получаются из (5) заменой правых частей нулями и оператора D его собственным значением if:

$$\mathbf{u}=\frac{i}{f\rho_\text{п}}M(\nabla P),\qquad \operatorname{div}\frac{M(\nabla P)}{\rho_\text{п}}-\frac{gM_r(\nabla P)}{\rho_\text{п}c_0^2}+\frac{4\omega^2f^2P}{\rho_\text{п}c_0^2}=0. \tag{8}$$

Краевое условие при $r=r_0$ получается из второго уравнения (8) отбрасыванием первого слагаемого. Из (8) видно, что инерционных собственных колебаний (без возмущений давления) не существует. Пространственные переменные r и θ в уравнении (8) не разделяются из-за множителя Q в функции $\mathbf{M}$. Исключением является случай однородного равновесного состояния, в котором, ограничиваясь для простоты приближением Буссинеска $\operatorname{div}\mathbf{u}=0$, отфильтровывающим акустические волны, получаем для P уравнение $[f^2\nabla^2-(\mathbf{k}\cdot\nabla)^2]P=0$, имеющее частные решения с разделяющимися переменными вида $P=r^ne^{im\lambda}F_n^m(\cos\theta)$.

В традиционном приближении уравнение (8) превращается в приливное уравнение Лапласа, в котором переменные разделяются, так как в нем Q может зависеть только от r; это его свойство широко использовалось для изучения собственных колебаний вращающихся жидкостей в моделях с *горизонтальными* твердыми стенками (см., например, книги ([1], [2]), посвященные таким моделям атмосферы и океана). Однако при произвольном рельефе твердых стенок решения с разделяющимися переменными непригодны, и аналитических преимуществ у традиционного приближения не остается.

Алгебраическое уравнение для собственных частот можно получить, интегрируя по объему жидкости с весом $Q_1^2=(f^2-k^2)^2Q^2$ аналогичное (3) локальное уравнение энергии собственных колебаний

$$f^2\rho_0\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}^*-if\rho_0\mathbf{k}\cdot(\mathbf{u}\times\mathbf{u}^*)-\rho_0N_0^2u_ru_r^*-f^2\frac{pp^*}{\rho_0c_0^2}=\frac{if}{2\omega}\operatorname{div}p\mathbf{u}^*, \tag{9}$$

где звездочка обозначает комплексно-сопряженную величину. Это же уравнение получается интегрированием по объему с весом $(\rho_0/\rho_\text{п})P^*Q_1^2$

второго уравнения (8); оно приводится к виду

$$\int\left[Q_1^2\nabla P^*\cdot \mathrm{M}(\nabla P)+2Q_1P^*\nabla Q_1\cdot \mathrm{M}(\nabla P)-\frac{4\omega^2f^2}{c_0^2}Q_1^2PP^*\right]\frac{\rho_0\,dV}{\rho_п^2}=$$

$$=\frac{4\omega^2f^2}{g\rho_{00}}\int Q_1^2PP^*\,d\Sigma \tag{10}$$

и представляет собой алгебраическое уравнение 12 степени относительно f, коэффициенты которого суть квадратичные функционалы от P. Выделив имеющие физический смысл ветви корней f этого уравнения, соответствующие акустическим, гравитационным (поверхностным и внутренним) и гироскопическим колебаниям, собственные частоты можно находить вариационным методом, подбирая экстремали P, минимизирующие последовательные корни нужной ветви.

При однородном равновесном состоянии (и, для простоты, в приближении Буссинеска) для f получается уравнение

$$f^2\int|\nabla P|^2dV+if\int P^*(\mathbf{n}\times\mathbf{k})\cdot\nabla P\,dS-\int|\mathbf{k}\cdot\nabla P|^2\,dV=\frac{4\omega^2f^2(f^2-1)}{g}\int|P|^2\,d\Sigma, \tag{11}$$

где S — полная граница жидкости, а $\mathbf{n}$ — внешняя нормаль к ней (в традиционном приближении получается более сложное уравнение 6 степени с двумя нефизическими корнями). Пренебрегая правой частью (т. е. колебаниями свободной поверхности), получаем уравнение для пары частот гироскопических колебаний. При отсутствии вращения размерные частоты σ собственных колебаний свободной поверхности определяются минимизацией по P функционала

$$\sigma^2=g\int|\nabla P|^2\,dV\left(\int|P|^2\,d\Sigma\right)^{-1}. \tag{12}$$

Для описания вынужденных колебаний (например, приливных) удобно ввести столбцы функций $B=\{\mathbf{u},\ P,\ \eta\}$, $\eta=g(p-c_0^2\rho)/(\rho_0c_0^2N)$, со **скалярным** произведением

$$B_1\circ B_2=\frac{1}{2}\int\left(\mathbf{u}_1\cdot\mathbf{u}_2^*+\frac{4\omega^2}{\rho_п^2c_0^2}P_1P_2^*+\eta_1\eta_2^*\right)\rho_0\,dV+\frac{2\omega^2}{g\rho_{00}}\int P_1P_2^*\,d\Sigma. \tag{13}$$

Пусть $\{B_n\}$ — полная ортонормированная в смысле (13) система комплексных амплитуд собственных колебаний со всевозможными собственными частотами f_n. Тогда, используя безразмерное время $\tau=2\omega t$, можно записать уравнение колебаний, создаваемых периодическим вынуждающим воздействием, и его решение в виде

$$\frac{\partial B}{\partial\tau}=\mathscr{L}B+e^{if\tau}\sum c_nB_n,\qquad B=-ie^{if\tau}\sum\frac{c_nB_n}{f-f_n}, \tag{14}$$

где $\mathscr{L}$ — операторная матрица, фигурирующая в уравнениях (1), а c_n — коэффициенты разложения комплексной амплитуды воздействия по системе столбцов-функций $\{B_n\}$.

Поскольку приливные колебания уровня открытого океана невелики (не превышают 2 м), все частоты f_n собственных колебаний Мирового океана, по-видимому, не слишком близки к частотам f приливообразующих сил — в противном случае существовали бы резонансные приливы катастрофического характера.

Институт океанологии им. П. П. Ширшова
Академии наук СССР
Москва

Поступило
16 XI 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *Л. А. Дикий,* Теория колебаний земной атмосферы, 1969. [2] *В. М. Каменкович,* Основы динамики океана, 1973.