Доклады Академии наук СССР
1974. Том 215, № 5

УДК 517.554 *МАТЕМАТИКА*

А. Я. ИСМАЙЛОВ, М. МАНСУРОВ, В. В. САЛАЕВ

# О СИНГУЛЯРНОМ ИНТЕГРАЛЕ ТЕОРИИ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ПО ВЕКУА

*(Представлено академиком И. Н. Векуа 22 X 1973)*

Пусть $\gamma$ — замкнутая жорданова спрямляемая кривая; $S(t,\tau)$ — небольшая из длин дуг, стягивающих точки $t, \tau\in\gamma$.

В работе рассматривается обобщенный сингулярный интеграл Коши теории аналитических функций в смысле И. Н. Векуа в пространствах непрерывных функций по гладким кривым и по кривым класса $k$ ($k$-кривые), для которых

$$S(t,\tau)\leqslant\text{const}\,|t-\tau|,\qquad \forall t\in\gamma\quad \int_\gamma\frac{d\xi}{\xi-t}=\pi i.$$

Доказана оценка типа оценки А. Зигмунда, получены аналоги теорем И. И. Привалова — И. Н. Векуа, Л. Магнарадзе.

Рассмотрим введенный в [4] обобщенный сингулярный интеграл Коши

$$(Su)(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\Omega_1(t,\xi)u(\xi)\,d\xi-\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\Omega_2(t,\xi)\overline{u(\xi)}\,\overline{d\xi},$$

где

$$\Omega_{1,2}(t,\xi)=\frac{e^{\omega_1(t,\xi)}\pm e^{\omega_2(t,\xi)}}{2(\xi-t)},$$

$$|\omega_j(t,\xi)-\omega_j(\tau,\xi)|\leqslant M_p'|t-\tau|^{(p-2)/p},\quad p>2,\quad j=1,2.$$

Каждой непрерывной на $\gamma$ функции $u(t)$ поставим в соответствие функцию

$$\omega_u(\delta)=\max_{S(t,\tau)\leqslant\delta}|u(t)-u(\tau)|,$$

определенную на $(0, l/2]$, где $l$ — длина кривой $\gamma$.

Теорема 1. *Пусть $\gamma$ — гладкая кривая*

$$\int_0^{l/2}(\omega_u(\xi)/\xi)\,d\xi<+\infty,$$

*тогда для операторов $S$ верны оценки*

$$\|Su\|_{C_\gamma}\leqslant C_1\left(\int_0^{l/2}\frac{\omega_u(\xi)}{\xi}d\xi+\|u\|_{C_\gamma}\right),$$

$$\omega_{Su}(\delta)\leqslant C_2\left(\int_0^{\delta}\frac{\omega_u(\xi)}{\xi}d\xi+\delta\int_\delta^{l/2}\frac{\omega_u(\xi)}{\xi^2}d\xi+\|Su\|_{C_\gamma}\delta^{(p-2)/p}\right),$$

*где постоянные $C_1$, $C_2$ не зависят от $u$.*

Доказательство проводится по следующей схеме. Обозначим $(Su)(t)=v(t)$. Тогда, как легко видеть, $v(t)$ можно представить в виде

$$v(t)=\tilde{u}(t)+\frac{1}{2\pi i}\sum_{j=1}^{2}\int_{\gamma}\frac{e^{\omega_j(t,\xi)}\pm e^{\omega_j(\xi,\xi)}}{2(\xi-t)}u(\xi)\,d\xi-$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{e^{\omega_1(t,\xi)}-e^{\omega_1(\xi,\xi)}}{2(\xi-t)}\overline{u(\xi)}\,\overline{d\xi}+\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{e^{\omega_2(t,\xi)}-e^{\omega_2(\xi,\xi)}}{2(\xi-t)}\overline{u(\xi)}\,\overline{d\xi},$$

где

$$\tilde{u}(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{u(\xi)}{\xi-t}\,d\xi.$$

С помощью этого представления доказывается первая оценка теоремы 1.

Далее, если $\gamma$ — гладкая кривая, то $v$ ([4], стр. 200) удовлетворяет определенному интегральному уравнению вида

$$v=-T_G(Av+B\overline{V})+\tilde{u},\qquad T_Gf=-\frac{1}{\pi}\iint_{G}\frac{f(z)\,dx\,dy}{z-\zeta};$$

$A,\ B\in L_{p,2}(E)$, $G$ — множество точек, лежащих внутри $\gamma$. Используя оценку ([4], стр. 54)

$$|T_G(Av+B\overline{v})(t_1)-T_G(Av+B\overline{v})(t_2)|\leqslant M_p\|Av+B\overline{v}\|_{L_p(\overline{G})}|t_1-t_2|^{(p-2)/p},\qquad p>2,$$

и принцип максимума ([4], стр. 164), получим

$$\omega_{TG(Av+B\overline{v})}(\delta)\leqslant C\|v\|_{C_\gamma}\delta^{(p-2)/p},$$

где постоянная $C$ не зависит от $v$.

Из полученного и из оценки Зигмунда ([5, 2]) для функции $\tilde{u}(t)$ следует вторая оценка теоремы 1.

Через $M$ обозначим множество модулей непрерывности (определение, например, см. ([6]), стр. 108), определенных на $(0,\ l/2]$. Пространство $H_\varphi=\{u\in C_\gamma\,|\,\omega_u(\delta)=O(\varphi(\delta)),\ \varphi\in M\}$ в норме $\|u\|_{H_\varphi}=\|u\|_{C_\gamma}+\sup\limits_{0<\xi\leqslant l/2}(\omega_u(\xi)/\varphi(\xi))$ являются банаховом пространством.

Для функций $\varphi\in M$, удовлетворяющих условию $\int_0^{l/2}(\varphi(\xi)/\xi)\,d\xi<+\infty$, рассмотрим оператор

$$(Z_\varphi)(\delta)=\int_0^{\delta}\frac{\varphi(\xi)}{\xi}\,d\xi+\delta\int_{\delta}^{l/2}\frac{\varphi(\xi)}{\xi^2}\,d\xi.$$

Отметим, что если $\varphi(\delta)$ принадлежит области определения оператора $Z$, то функция $(Z\varphi)(\delta)\in M$.

Теорема 2. *Пусть $\gamma$ — гладкая кривая, $\varphi\in M$,*

$$\int_0^{l/2}(\varphi(\xi)/\xi)\,d\xi<+\infty;$$

*тогда оператор $S$ действует из $H_{\varphi(\delta)}$ в $H_{(Z\varphi)(\delta)+\delta^{(p-2)/p}}$ и ограничен.*

По определению $\varphi\in MH$, если $\varphi\in M$ и $(Z\varphi)(\delta)=O(\varphi(\delta))$. Ряд эквивалентных описаний множества $MH$ имеется в работе ([3]), стр. 493—501.

Следствие 1. *Если $\gamma$ — гладкая кривая и $\varphi\in MH$, то $S$: $H_{\varphi(\delta)}\to H_{\varphi(\delta)+\delta^{(p-2)/p}}$ и ограничен.*

Следствие 2 ([4]). Если $\gamma$ — *гладкая кривая, то оператор* $S$: $H_{\delta^\alpha}\to H_{\delta}\min\{\alpha,\ (p-2)/p\}$, $0<\alpha<1$.

Пусть $\varphi \in M$ и $\int_0^{l/2} (\varphi(\xi)/\xi)\, d\xi < +\infty$. Введем множество

$$J_\varphi = \left\{ u \in C_\gamma \,\Big|\, \int_0^{l/2} \frac{\omega_u(\xi)}{\xi^2} \varphi(\xi)\, d\xi \right\}.$$

В норме

$$\|u\|_{J_\varphi} = \|u\|_{C_\gamma} + \int_0^{l/2} \frac{\omega_u(\xi)}{\xi^2} \varphi(\xi)\, d\xi$$

пространство $J_\varphi$ является банаховым пространством. При $\varphi(\xi) = \xi \ln^q (le^q/2\xi)$, $q > 0$, пространства $J_\varphi$ будем обозначать через $J_q$. Пространства $J_\varphi$ были введены в (2) как обобщения пространств $J_q$ (5).

Теорема 3. *Если $\gamma$ — гладкая кривая, $\varphi \in M$,*

$$\int_0^{l/2} (\varphi(\xi)/\xi^{1+2/p})\, d\xi < +\infty,$$

*то оператор $S$: $J_{Z_\varphi^q} \to J_{Z_\varphi^{q-1}}$ и ограничен; здесь $Z_\varphi^q = Z(Z_\varphi^{q-1})$, $Z_\varphi^0 = \varphi$.*

Следствие 1. *Если $\varphi \in MH$ и*

$$\int_0^{l/2} (\varphi(\xi)/\xi^{1+2/p})\, d\xi < +\infty,$$

*то оператор $S$: $J_\varphi \to J_\varphi$ и ограничен.*

Следствие 2. *Оператор $S$ действует из $J_q$ в $J_{q-1}$ и ограничен.*

Следствие 3. *Проективный предел $J_\varphi^\infty = \bigcup_{q=0}^{\infty} J_{Z_\varphi^q}$ пространств $J_\varphi^\infty$ инвариантен относительно оператора $S$ и оператор $S$ непрерывен в $J_\varphi^\infty$.*

Теорема 3 является аналогом соответственных теорем из работ (5, 2) для оператора $Au = \tilde{u}$.

Рассмотрим теперь оператор $S$ в случае, когда кривая $\gamma$ является $k$-кривой. Очевидно, что множество гладких кривых является правильной частью множеств $k$-кривых.

Теорема 4. *Пусть $\gamma$ — $k$-кривая и $\int_0^{l/2} (\omega_u(\xi)/\xi)\, d\xi < +\infty$.*

*Тогда для оператора $S$ верны оценки*

$$\|Su\|_{C_\gamma} \leqslant C_1 \left( \int_0^{l/2} \frac{\omega_u(\xi)}{\xi} d\xi + \|u\|_{C_\gamma} \right),$$

$$\omega_{Su}(\delta) \leqslant C_2 \left( \int_0^{\delta} \frac{\omega_u(\xi)}{\xi} d\xi + \delta \int_\delta^{l/2} \frac{\omega_u(\xi)}{\xi^2} d\xi + \|u\|_{C_\gamma} \delta^{(p-2)/p} \ln \frac{le^{p/(p-2)}}{2\delta} \right),$$

*где $\delta \in (0, l/2]$, а постоянные $C_1$, $C_2$ не зависят от $u$.*

Теорема 5. *Пусть $\gamma$ — $k$-кривая и $\varphi \in MH$; тогда оператор $S$: $H_{\varphi(\delta)} \to H_{\varphi(\delta) + \delta^{(p-2)/p} \ln (le^{p/(p-2)}/2\delta)}$ и ограничен.*

Теорема 6. *Пусть $\varphi \in M$,*

$$\int_0^{l/2} \left( \varphi(\xi) \ln \frac{l}{\xi} \Big/ \xi^{1+2/p} \right) d\xi < +\infty;$$

*тогда оператор $S$: $J_{Z_\varphi^q} \to J_{Z_\varphi^{q-1}}$ и ограничен.*

Следствие 1. *Пусть* $\varphi \in MH$ *и*

$$\int_0^{l/2} \left( \varphi(\xi) \ln \frac{l}{\xi} \right] \xi^{1+2/p} \Big) d\xi < +\infty,$$

тогда $S$: $J_\varphi \to J_\varphi$ *и ограничен.*

Следствие 2. *Если* $\gamma$ — *k-кривая, то оператор* $S$: $J_q \to J_{q-1}$ *и ограничен.*

Следствие 3. *Пространство* $J_\varphi^\infty = \bigcap_{q=0}^{\infty} J_{Z_\varphi^q}$ *инвариантно относительно оператора* $S$ *и оператор* $S$ *непрерывен в* $J_\varphi^\infty$.

Азербайджанский государственный университет
им. С. М. Кирова
Баку

Поступило
12 VII 1973

## ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *А. А. Бабаев*, Уч. Зап. Азерб. гос. унив., сер. физ.-матем. наук, № 4 (1963). [2] *А. А. Бабаев*, Там же, № 5 (1965). [3] *Н. К. Бария, С. Б. Стечкин*, Тр. Московск. матем. общ., т. 5 (1956). [4] *И. Н. Векуа*, Обобщенные аналитические функции, М., 1959. [5] *Л. Магнарадзе*, Сообщ. АН ГрузССР, т. 8 (1947). [6] *А. Ф. Тиман*, Теория приближения функций действительного переменного, 1960. [7] *A. Zygmund*, Pracl Matematyczno — Fizyczne, v. 33, 1924.