Доклады Академии наук СССР
1974. Том 215, № 5

УДК 517.91 *МАТЕМАТИКА*

Х. М. МАЛИКОВ

СОВМЕСТНОСТЬ СИСТЕМЫ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И РАЗРЕШИМОСТЬ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ПЕРЕОПРЕДЕЛЕННОЙ СИСТЕМЫ

(*Представлено академиком С. Л. Соболевым 13 VIII 1973*)

Рассматривается общая система линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, правые части которой зависят нелинейно от неизвестных функций. Для такой системы, совместность которой сводится к совместности переопределенной системы, сформулировано необходимое и достаточное условие совместности. Далее, для переопределенной системы сформулировано необходимое и достаточное условие однозначной разрешимости задачи Коши.

Пусть $\mathscr{L}$ — кольцо полиномов от одной неизвестной с коэффициентами из поля вещественных или комплексных чисел, $\mathscr{L}^n$ — пространство n-мерных векторов, координаты которых принадлежат $\mathscr{L}$, Φ^n — пространство n-мерных векторов, координаты которых как функции вещественной переменной $0\leqslant t<\infty$ бесконечно дифференцируемы, т. е. $\Phi=C^\infty[0, \infty)$.

Фиксируем некоторую матрицу $L(\lambda)$: $\mathscr{L}^m\to\mathscr{L}^n$, ранг которой равен r. Построим матрицу $K(\lambda)$: $\mathscr{L}^m\to\mathscr{L}^{m-r}$ такую, чтобы ранг матрицы $Q=\left(\frac{L}{K}\right)$ равнялся m. Алгебраическое дополнение минора $(n-r)$-го порядка, образованного из $n-r$ строк матрицы P: $\mathscr{L}^{n-r}\to\mathscr{L}^{m+n-r}$ с номерами $i_1, \ldots, i_{n-r}$ в матрице (P, Q): $\mathscr{L}^{m+n-r}\to\mathscr{L}^{m+n-r}$, обозначим через $N_{i_1\ldots i_{n-r}}(\lambda)$. Общий наибольший делитель полиномов $N_{1i_2\ldots i_{n-r}}, \ldots, N_{ni_2\ldots i_{n-r}}$ обозначим через $\omega_{i_2\ldots i_{n-r}}$, т. е. $N_{i_1\ldots i_{n-r}}=\omega_{i_2\ldots i_{n-r}}M_{i_1\ldots i_{n-r}}$, $i_1=1, \ldots, n$, где полиномы $M_{1i_2\ldots i_{n-r}}, \ldots$ $\ldots, M_{ni_1\ldots i_{n-r}}$ взаимно просты.

Построим матрицу

$$M(\lambda)=(M_{1i_2\ldots i_{n-r}}, \ldots, M_{ni_2\ldots i_{n-r}}), \quad i_2<\ldots<i_{n-r},$$
$$i_2, \ldots, i_{n-r}=1, \ldots, n.$$

Ясно, что как только один из индексов $i_1, \ldots, i_{n-r}$ примет значение, большее, чем n, то $N_{i_1\ldots i_{n-r}}(\lambda)=0 \quad \forall\lambda$.

Т е о р е м а. *Для совместности в* Φ^m *системы уравнений*

$$L(d/dt)x=\varphi(t, x), \tag{1}$$

где $\varphi(t, x)=\varphi(t, x_1, \ldots, x_m)$ *относительно всех переменных принадлежит* Φ^n, *необходимо и достаточно, чтобы*

$$M(d/dt)\varphi(t, \theta(t))=0 \quad \forall\theta\in\Phi^m. \tag{2}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Необходимость вытекает из известных свойств определителей. Докажем д о с т а т о ч н о с т ь. Построим квадратную систему, совместную относительно $\theta\in\Phi^m$:

$$\sum_{i_1<\ldots<i_{n-r}}(-1)^l N'_{i_1\ldots i_{n-r}}(d/dt)\, y^{i_1\ldots i_{n-r}}(t, \theta)-\theta=0,$$
$$l=\sum_{k=1}^{n-r}(k+i_k), \quad i_1, \ldots, i_{n-r}=1, \ldots, n, \tag{3}$$

где $N'_{i_1\ldots i_{n-r}}(\lambda)$ — матрица, транспонированная к матрице, составленной из алгебраических дополнений элементов определителя $N_{i_1\ldots i_{n-r}}(\lambda)$. Вектор $y^{i_1\ldots i_{n-r}}\in\Phi^m$ определим из уравнения

$$\omega(d/dt)\,y^{i_1\ldots i_{n-r}}=q_{i_1\ldots i_{n-r}}(d/dt)\,\psi^{i_1\ldots i_{n-r}}(t,\ \theta),$$

где $\omega(\lambda)$ — общий наибольший делитель всех полиномов $\omega_{i_1\ldots i_{n-r}}(\lambda)$, $\psi^{i_1\ldots i_{n-r}}(t,\ \theta)$ строится из m координат вектора $f=\binom{\varphi}{g}\in\Phi^{m+n-r}$ $\forall g\in\Phi^{m-r}$ вычеркиванием $n-r$ координат с номерами $i_1,\ldots,i_{n-r}$, а полиномы $q_{i_1\ldots i_{n-r}}(\lambda)$, $i_1<\ldots<i_{n-r}$, определяются из представления общего наибольшего делителя

$$\omega(\lambda)=\sum_{i_1,\ldots,i_{n-r}}(-1)^l q_{i_1\ldots i_{n-r}}N_{i_1\ldots i_{n-r}},\quad i_1,\ldots,i_{n-r}=1,\ldots,n.$$

Тогда непосредственной проверкой можем убедиться, что $\theta\in\Phi^m$ будет решением переопределенной системы

$$Q(d/dt)x=f(t,\ x).\tag{4}$$

Когда правая часть этой системы не содержит x, (3) дает ее решение в явном виде.

Ясно, что из совместности системы (4) следует совместность системы (1), обратное также верно, хотя

$$\dim\operatorname{Ker}Q(d/dt)<\dim\operatorname{Ker}L(d/dt)=\infty.$$

Следствие. *Для того чтобы при выполнении* (2) *система* (4) *имела в* Φ^m *единственное решение, удовлетворяющее условию*

$$B(d/dt)x|_{t=0}=0,$$

где

$$B(\lambda)=\begin{pmatrix}B_1 & 0 & \ldots\\ 0 & B_2 & \ldots\\ \ldots & \ldots & \ldots\\ 0\ldots & 0 & B_m\end{pmatrix},\quad B_i=\begin{pmatrix}1\\ \lambda\\ \vdots\\ \lambda^{k_i}\end{pmatrix},\quad i=1,\ldots,m,$$

необходимо и достаточно, чтобы число строк матрицы $B(\lambda)$ *равнялось степени полинома* $\omega(\lambda)$. *Когда система* (4) *является квадратной* ($r=m=n$), *то матрица* M *будет нулевой, а число* $k_1+\ldots+k_m$ *будет совпадать со степенью полинома* $\det Q(\lambda)$.

Аналогичные задачи для переопределенной системы при $f(t,\ x)=f(t)$ в классе функций, убывающих на бесконечности, рассмотрены в ([1]), а при $m=1$ в ([2]).

Таджикский сельскохозяйственный институт
Душанбе

Поступило
3 VIII 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *В. А. Солонников*, Зап. научн. семинаров Ленингр. отд. Матем. инст. им. В. А. Стеклова АН СССР, т. 14, 237 (1969). [2] *Х. М. Маликов*, Докл. АН Тадж. ССР, т. 14, № 12, 8 (1971).