Доклады Академии наук СССР
1974. Том 216, № 4

УДК 530.182 МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

А. Я. ТЕРЛЕЦКИЙ

НЕКОТОРЫЕ ТОЧНЫЕ ВОЛНОВЫЕ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

(Представлено академиком Н. Н. Боголюбовым 31 I 1974)

Для теории волновых процессов в нелинейных средах важное значение имеют точные решения [1], среди которых особое внимание привлекают стационарные плоские волны (см., например, [2, 3]). Известны точные решения нелинейных уравнений поля в виде бегущих плоских волн

$$\psi_i=\varphi_i(\tau), \quad \tau=z-ut, \tag{1}$$

где ψ_i — амплитуда компонент поля, $\varphi_i(\tau)$ — периодические (но несинусоидальные) функции, u — постоянная скорость распространения волн. В простейшем случае электромагнитных волн в нелинейной среде без поглощения уравнения для избранных компонент поля при нулевых значениях остальных (случай линейной поляризации) приводятся к виду

$$\nabla^2\psi-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}+F(\psi)\psi=0, \tag{2}$$

т. е. функция $\varphi(\tau)$ определяется обыкновенным нелинейным уравнением вида

$$(1-u^2/c^2)\,d^2\varphi/d\tau^2+F(\varphi)\varphi=0, \tag{3}$$

решение которого известным путем сводится к квадратурам. Очевидно, функция $\varphi(\tau)$ может быть синусоидальной лишь при $F(\varphi)=\text{const}$, т. е. в линейном случае.

Таким образом, нелинейные уравнения вида (2) не имеют решений в виде монохроматических бегущих плоских волн. Для уравнений такого вида неосуществимо и разделение переменных, т. е. не существует решений типа стоячих волн

$$\psi(z,\ t)=\varphi_1(z)\varphi_2(t).$$

Эти запреты, справедливые для рассматривавшихся случаев линейно поляризованных волн, оказываются устранимыми для циркулярно поляризованных волн. Ниже мы покажем, что для изотропно-нелинейной среды уравнения электромагнитного поля имеют точные решения в виде монохроматических бегущих циркулярно поляризованных плоских волн, а также в виде стоячих волн циркулярной поляризации.

1. Рассмотрим достаточно общий случай электромагнитного поля в однородной, изотропно-нелинейной, активной среде, находящейся в однородном магнитном поле B', направленном вдоль оси z. Плоская волна, распространяющаяся вдоль оси z, должна быть решением системы уравнений Максвелла и материальных уравнений для вектора поляризаций **P** *.

* Для простоты мы воспользуемся классической теорией дисперсии, достаточно хорошо описывающей явление в окрестности центра линии поглощения, т. е. положим

$$\ddot{\mathbf{P}}+F(P,\dot{P})\dot{\mathbf{P}}+\omega_0^2 f(P)\mathbf{P}=\frac{e^2N}{m}\left\{\mathbf{E}+\frac{1}{c}[\mathbf{V}\cdot\mathbf{B}]\right\}.$$

Однако точные решения имеют место и при других законах дисперсии.

Эта система уравнений в компонентах имеет вид

$$\frac{\partial B_y}{\partial z}+\frac{1}{c}(\dot{E}_x+4\pi\dot{P}_x)=0,\qquad \frac{\partial E_y}{\partial z}-\frac{1}{c}\dot{B}_x=0,$$

$$\frac{\partial B_x}{\partial z}-\frac{1}{c}(\dot{E}_y+4\pi\dot{P}_y)=0,\qquad \frac{\partial E_x}{\partial z}+\frac{1}{c}\dot{B}_y=0,$$

$$\frac{\partial}{\partial z}(E_z+4\pi P_z)=0,\qquad \frac{\partial B_z}{\partial z}=0,$$

$$\ddot{P}_x-\frac{\varkappa-\gamma}{m}[1-\varphi(P,\dot{P})]\dot{P}_x+\omega_0^2P_xf(P)-\Omega\dot{P}_y=\frac{e^2N}{m}E_x, \tag{4}$$

$$\ddot{P}_y-\frac{\varkappa-\gamma}{m}[1-\varphi(P,\dot{P})]\dot{P}_y+\omega_0^2P_yf(P)+\Omega\dot{P}_x=\frac{e^2N}{m}E_y,$$

$$\ddot{P}_z-\frac{\varkappa-\gamma}{m}[1-\varphi(P,\dot{P})]\dot{P}_z+\omega_0^2P_zf(P)-\frac{e}{mc}(B_x\dot{P}_y-B_y\dot{P}_x)=\frac{e^2N}{m}E_z,$$

где $\varkappa-\gamma$ — ненасыщенные усиление и поглощение; $\Omega=(e/mc)B'$ — ларморова частота; N — число молекул в единице объема; $P=(P_x^2+P_y^2+P_z^2)^{1/2}$, $\dot{P}=(\dot{P}_x^2+\dot{P}_y^2+\dot{P}_z^2)^{1/2}$ — т. е. абсолютные значения векторов $\mathbf{P}$ и $\dot{\mathbf{P}}$; $\varphi(P,\dot{P})$ и $f(P)$ — функции, выражающие изотропно-нелинейные свойства среды. Очевидно, при малых $\mathbf{P}$ и $\dot{\mathbf{P}}$, т.е. в линейном приближении, $\varphi=0$ и $f=1$.

2. Плоская монохроматическая циркулярно поляризованная бегущая волна может быть представлена в виде

$$\begin{aligned} &E_x=E_0\cos(\omega t-kz), &&E_y=\pm E_0\sin(\omega t-kz), &&E_z=0,\\ &B_x=\pm B_0\sin(\omega t-kz), &&B_y=B_0\cos(\omega t-kz), &&B_z=0,\\ &P_x=P_0\cos(\omega t-kz), &&P_y=\pm P_0\sin(\omega t-kz), &&P_z=0,\end{aligned} \tag{5}$$

где (+) для правой и (—) для левой циркулярных поляризаций.

Для волны (5) абсолютные значения векторов поля E, B, P соответственно равны их стационарным амплитудам E_0, B_0, P_0. Поэтому нелинейные функции $\varphi(P,\dot{P})$ и $f(P)$ для такой волны соответственно равны $\varphi(P_0,\omega P_0)$ и $f(P_0)$, т. е. не содержит z и t. А это означает, что так же, как в линейном случае, выражения (5) являются решениями системы уравнений (4), если E_0, B_0, P_0 удовлетворяют условиям

$$\varphi(P_0,\omega P_0)=1,\quad B_0=-c\frac{k}{\omega}E_0,\quad \left(-k^2+\frac{\omega^2}{c^2}\right)E_0+\frac{\omega^2}{c^2}4\pi P_0=0, \tag{6}$$

$$-P_0\omega^2+\omega_0^2P_0f(P_0)\pm\Omega\omega P_0=\frac{e^2N}{m}E_0.$$

Первое из этих уравнений определяет стационарную амплитуду вектора поляризации, второе связывает B_0 с E_0, третье и четвертое дают дисперсионное уравнение ([4])

$$k^2=\frac{\omega^2}{c^2}\left(1+\frac{4\pi\frac{e^2N}{m}}{\omega_0^2f(P_0)-\omega^2\mp\omega\Omega}\right) \tag{7}$$

похожее на то, которое получается приближенным методом для линейно поляризованной волны ([2]).

Таким образом, монохроматическая циркулярно поляризованная плоская бегущая волна распространяется без изменения синусоидальной формы, но ее скорость зависит от ее же амплитуды и от величины внешнего магнитного поля. Такое точное решение, очевидно, справедливо не только для изотропной среды, но и для одноосных кристаллов, если волна распространяется вдоль оси кристалла.

3. В частном случае для неактивной среды с пренебрежимо малым поглощением, т. е. при $\varkappa-\gamma=0$, укороченная таким образом система уравнений (4) имеет точные решения в виде циркулярно поляризованных монохроматических стоячих волн вида

$$\begin{aligned} E_x&=E(z)\cos\omega t, \quad E_y=\pm E(z)\sin\omega t,\\ B_x&=\mp B(z)\sin\omega t, \quad B_y=B(z)\cos\omega t,\\ P_x&=P(z)\cos\omega t, \quad P_y=\pm P(z)\sin\omega t. \end{aligned} \tag{8}$$

Подставляя (8) в (4) при условии $\varkappa-\gamma=0$ и замечая, что аналогично случаю бегущих волн $f(P)=f[P(z)]$, получаем для функций $E(z)$ и $P(z)$ систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{d^2E}{dz^2}+\frac{\omega^2}{c^2}(P+4\pi E)=0, \tag{9}$$

$$(-\omega^2+\omega_0{}^2f(P)\pm\Omega\omega)P=\frac{e^2N}{m}E. \tag{10}$$

Разрешая (10) относительно P и подставляя в (9), получаем уравнение вида

$$d^2E/dz^2+F_\pm(E)=0, \tag{11}$$

решение которого сводится к квадратурам аналогично уравнению (3).

Итак, укороченная система нелинейных уравнений (4) имеет решение в виде монохроматических стоячих, циркулярно поляризованных волн, однако, как видно из (9), (10), (11), пространственная форма этих волн не будет синусоидальной при $f(P)\neq 1$, т. е. в нелинейном случае.

4. Существует еще один тип точных решений системы нелинейных уравнений (4) в виде стоячих немонохроматических, циркулярно поляризованных волн. В этом случае при отсутствии внешнего магнитного поля, т. е. при $\Omega=0$, решение системы (4) будем искать в виде

$$\begin{aligned} &E_x=E(t)\cos kz, \quad E_y=\pm E(t)\sin kz, \quad E_z=E_z(t),\\ &B_x=\mp B(t)\sin kz, \quad B_y=B(t)\cos kz,\\ &P_x=P(t)\cos kz, \quad P_y=\pm P(t)\sin kz, \quad P_z=0. \end{aligned} \tag{12}$$

Подставляя (12) в (4), получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений, определяющих $E(t)$ и $P(t)$:

$$\begin{aligned} &k^2E+\frac{1}{c^2}(\ddot E+4\pi\ddot P)=0,\\ &\ddot P+\omega_0{}^2Pf(P)-\frac{\varkappa-\gamma}{m}[1-\varphi(P,\dot P)]\dot P=\frac{e^2N}{m}E. \end{aligned} \tag{13}$$

Таким образом, задача нахождения $E(t)$ и $P(t)$ свелась к решению системы обыкновенных дифференциальных уравнений. В простейшем частном случае неактивной ($\varkappa=0$) непоглощающей ($\gamma=0$) и бездисперсионной ($\ddot P=0$) среды системы (13) сводится к укороченной

$$k^2E+\frac{1}{c^2}(\ddot E+4\pi\ddot P)=0, \quad \omega_0{}^2Pf(P)=\frac{e^2N}{m}E, \tag{14}$$

которая эквивалентна уравнению вида (3) или (11)

$$\ddot X+F(X)=0 \tag{15}$$

для

$$X = E + 4\pi P = \left[\frac{\omega_0{}^2 m}{e^2 N} f(P) + 4\pi \right] P, \qquad (16)$$

решение которого сводится к квадратурам.

5. Итак, уравнения электромагнитного поля в изотропно-нелинейной среде имеют решения в виде циркулярно поляризованных монохроматических плоских волн, распространяющихся со скоростью, зависящей от амплитуды. Существуют также точные решения в виде циркулярно поляризованных стоячих волн, монохроматических, но с несинусоидальной пространственной зависимостью амплитуды от координаты, либо немонохроматических, но с синусоидальным пространственным распределением. Иначе говоря, для циркулярной поляризации осуществимо разделение переменных.

Подобных точных решений тех же нелинейных уравнений поля не существует для линейно поляризованных плоских волн.

В заключение автор выражает глубокую благодарность чл.-корр. АН СССР Р. В. Хохлову за внимание к работе и ценные замечания.

Университет дружбы народов
им. П. Лумумбы
Москва

Поступило
21 I 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *С. А. Ахманов, Р. В. Хохлов,* Проблемы нелинейной оптики, М., 1965. [2] *В. И. Карпман,* Нелинейные волны в диспергирующих средах, «Наука», 1973. [3] *Г. М. Заславский,* УФН, т. 111, 395 (1973). [4] *А. Я. Терлецкий,* Деп. ВИНИТИ, № 6660-73, 1973.