Доклады Академии наук СССР
1974. Том 216, № 4

УДК 539.3 *ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ*

Ю. А. УСТИНОВ

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ОДНОРОДНЫХ РЕШЕНИЙ НЕОДНОРОДНЫХ ПЛИТ

(Представлено академиком Ю. Н. Работновым 14 IX 1973)

В настоящее время существует ряд прикладных теорий многослойных плит, каждая из которых основана на определенной системе гипотез. Отсутствие единообразия делает актуальным анализ напряженно-деформированного состояния многослойных и в более общем случае неоднородных по толщине плит на основе трехмерных уравнений теории упругости, а также создание на его основе прикладных теорий с заданной асимптотической точностью. В ([1-4]) показано, что в этих целях особенно эффективным аппаратом является использование однородных решений в сочетании с асимптотическим методом.

В настоящей работе дается обобщение метода однородных решение на неоднородные по толщине плиты (многослойные плиты рассматриваются как частный случай). При заданных на боковой поверхности плиты напряжениях формулируется асимптотически точная прикладная теория.

1. Пусть $\Omega=S\times[-h, h]$ — область, занятая плитой, S — срединная поверхность плиты, ∂S — граница, S, $2h$ — толщина плиты, a — характерный линейный размер S, Γ — боковая поверхность. Плита отнесена к декартовой системе координат x, y, z с началом в S и осью z, ортогональной S. Упругие свойства плиты описываются параметрами Ляме $\lambda=\lambda(\zeta)$, $\mu=\mu(\zeta)$, где $z=h\zeta$, а $\lambda(\zeta)$, $\mu(\zeta)$ — кусочно-непрерывные функции. Изучаются однородные решения уравнений равновесия Ляме, удовлетворяющие условию отсутствия напряжений на торцах плиты.

2. Следуя ([1, 2]), введем потенциальное решение с помощью соотношений

$$u^{(2)}=\alpha(\zeta)\partial_1 A,\quad v^{(2)}=\alpha(\zeta)\partial_2 A,\quad w^{(2)}=\varepsilon^{-1}\gamma\beta(\zeta)A,$$

$$\varepsilon^2\Delta A-\gamma^2 A=0,\quad \Delta=\partial_1{}^2+\partial_2{}^2, \tag{1}$$

$$\partial_1=a\,\partial/\partial x,\quad \partial_2=a\,\partial/\partial y,\quad \zeta=z/h,\quad \varepsilon=h/a.$$

Подстановка (1) в уравнения равновесия Ляме при удовлетворении граничных условий на торцах приводит к некоторой спектральной задаче относительно пары функций $(\alpha(\zeta), \beta(\zeta))$. С помощью замены

$$\alpha(\zeta)=\gamma^{-2}p_0 f''-p_2 f,\qquad \gamma\beta(\zeta)=-\gamma^{-2}(p_0 f'')'-2(p_1 f')+(p_2 f)', \tag{2}$$

$$p_0=\frac{\lambda+2\mu}{4\mu(\lambda+\mu)},\quad p_1=\frac{1}{2\mu},\quad p_2=\frac{\lambda}{4\mu(\lambda+\mu)}$$

эта задача принимает вид

$$(p_0 f'')''+\gamma^2[2(p_1 f')'-(p_2 f)''-p_2 f'']+\gamma^4 p_0 f=0, \tag{3}$$

$$\gamma^2 f(\pm 1)=0=\gamma f'(\pm 1).$$

Соотношения (3) являются обобщением на неоднородный случай известной спектральной задачи П. Ф. Папковича ([5]).

Для задачи (3) справедливы следующие утверждения.

Теорема 1. *Задача* (3) *имеет дискретный спектр* $\{\gamma_k\}$ *с точкой сгущения на бесконечности и среди* $\gamma_k \neq 0$ *нет чисто мнимых.*

Из (3) видно, что спектр имеет симметричную структуру, собственным значениям γ_k и $-\gamma_k$ соответствует одна и та же собственная функция f_k. В силу отсутствия среди $\gamma_k \neq 0$ чисто мнимых, решения (1) при $\varepsilon \to 0$ имеют характер пограничного слоя, локализованного в окрестности Г.

Основываясь на результатах [6], можно доказать двукратную полноту системы собственных и присоединенных векторов задачи (3).

3. Введем вихревое решение [1,2] с помощью соотношений

$$u^{(3)} = l(\zeta)\partial_2 B, \quad v^{(3)} = -l(\zeta)\partial_1 B, \quad w^{(3)} = 0,$$
$$\varepsilon^2 \Delta B - \delta^2 B = 0. \tag{4}$$

Подставляя (4) в уравнения Ляме и удовлетворяя граничным условиям на торцах, получаем спектральную задачу

$$-\mu^{-1}(\mu l')' = \delta^2 l, \quad l'(\pm 1) = 0. \tag{5}$$

Левая часть и граничные условия, как легко видеть, определяют положительный оператор T в пространстве $L_2(-1, 1)$ с весом $\mu(\zeta)$. Следовательно, все собственные значения $\lambda_k(T) = \delta_k^2$ неотрицательны, а соответствующую им систему собственных вектор-функций можно считать ортонормированной.

Таким образом, вихревое решение, которое определяется как решение вида (4), соответствующее ненулевым точкам спектра задачи (5), имеет при $\varepsilon \to 0$ в Ω характер пограничного слоя.

4. Анализ задач (3), (5) показывает, что значения $\gamma_0 = \delta_0 = 0$ являются в совокупности кратной точкой спектра и ей соответствует жорданова цепочка, построение которой приводит к бигармоническому решению. Смысл этого названия определяется его видом

$$u^{(1)} = a\varepsilon \left[\varphi_1 + c_2 \partial_1 \Phi_2 - \sum_{n=1}^{2} (\zeta^{n-1} + \varepsilon^2 q_n \Delta) \partial_1 \Phi_n \right],$$

$$v^{(1)} = a\varepsilon \left[\varphi_2 + c_2 \partial_2 \Phi_2 - \sum_{n=1}^{2} (\zeta^{n-1} + \varepsilon^2 q_n \Delta) \partial_2 \Phi_n \right], \tag{6}$$

$$w^{(1)} = a \left(\Phi_2 + \varepsilon^2 K_1 \Delta \Phi_1 - \varepsilon^2 \sum_{n=1}^{2} c_n K_n \Delta \Phi_n \right);$$

$$q_1(\zeta) = \frac{\mu^*}{\lambda^* + \mu^*} \left[\int_0^\zeta \frac{\lambda(\zeta - \zeta_1)\, d\zeta_1}{\lambda + 2\mu} + \int_0^\zeta \frac{d\zeta_1}{\mu} \int_{\zeta_1}^1 \frac{2\lambda\mu}{\lambda + 2\mu} d\zeta_1 \right] - \frac{\lambda^*}{\lambda^* + \mu^*} \int_0^\zeta \frac{d\zeta_1}{\mu} \int_{\zeta_1}^1 \mu\, d\zeta_2,$$

$$q_2(\zeta) = \int_0^\zeta \frac{\zeta_1(\zeta_1 - \zeta)\lambda\, d\zeta_1}{\lambda + 2\mu} - \int_0^\zeta \frac{d\zeta_1}{\mu} \int_{\zeta_1}^1 \frac{4\mu(\lambda + \mu)}{\lambda + 2\mu} \zeta_2\, d\zeta_2 +$$

$$+ c_2 \left[\int_0^\zeta \frac{(\zeta - \zeta_1)\lambda\, d\zeta_1}{\lambda + 2\mu} + \int_0^\zeta \frac{d\zeta_1}{\mu} \int_{\zeta_1}^1 \frac{4\mu(\lambda + \mu)}{\lambda + 2\mu} d\zeta_2 \right], \tag{7}$$

$$c_1 = \frac{\mu^*}{\lambda^* + \mu^*}, \quad c_2 = \frac{1}{\lambda^* + 2\mu^*} \int_{-1} \frac{4\mu(\lambda + \mu)}{\lambda + 2\mu} \zeta\, d\zeta,$$

$$\lambda^* = \int_{-1}^{1} \frac{2\lambda\mu}{\lambda+2\mu} d\zeta, \qquad \mu^* = \int_{-1}^{1} \mu \, d\zeta;$$

здесь $\Phi_1(x, y)$ — бигармоническая функция, заменяющая собой решение уравнений плоской теории упругости с обобщенными упругими параметрами λ^*, μ^*; а $\Phi_2(x, y)$ — бигармоническая функция, которую с точностью до членов $O(\varepsilon^2)$ можно принять за прогиб плиты; φ_1, φ_2 — сопряженные гармонические функции, связанные с Φ_1,

$$\partial_1\varphi_1 = \partial_2\varphi_2 = \frac{\lambda^*+2\mu^*}{2(\lambda^*+\mu^*)} \Delta\Phi, \qquad \partial_2\varphi_1 = -\partial_1\varphi_2.$$

Формулы (7) определяют внутреннее деформированное состояние плиты (напряжения определяются по (7) с помощью обобщенного закона Гука). Подчеркнем, что при отсутствии напряжений на торцах эти формулы дают точный закон распределения напряжений и перемещений по толщине плиты вдали от Г и поэтому могут служить критерием правильности той или иной прикладной теории. Из (7) при достаточно малом ε и медленно меняющихся функциях $\Phi_n(x, y)$ вытекает справедливость гипотез Кирхгофа для плиты с произвольно меняющимися по толщине упругими свойствами.

5. Применение асимптотического метода в форме [1,2] позволяет сформулировать краевую задачу для функций Φ_1, Φ_2, когда на боковой поверхности Г заданы напряжения σ_n^0, τ_{ns}^0, τ_{nz}^0. Имеем

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial s^2} + \frac{a}{R}\frac{\partial}{\partial n}\right) [\mu^*\Phi_1 + (\mu_1^* - c_2\mu^*)\Phi_2]|_{\partial S} = N,$$

$$-\left(\frac{\partial^2}{\partial n\,\partial s} - \frac{a}{R}\frac{\partial}{\partial s}\right) [\mu^*\Phi_1 + (\mu_1^* - c_2\mu^*)\Phi_2]|_{\partial S} = T,$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial s^2} + \frac{a}{R}\frac{\partial}{\partial n}\right) [\mu_1^*\Phi_1 + (\mu_2^* - c_2\mu^*)\Phi_2]|_{\partial S} = M, \tag{8}$$

$$\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial^2}{\partial n\,\partial s} - \frac{a}{R}\frac{\partial}{\partial s}\right) [\mu_1^*\Phi_1 + (\mu_2^* - c_2\mu_1^*)\Phi_1] + d_1\frac{\partial\Delta\Phi_1}{\partial n} + d_2\frac{\partial\Delta\Phi_2}{\partial n} = z + \frac{\partial G}{\partial s};$$

здесь n, s — естественные безразмерные координаты контура ∂S, $R(s)$ — его кривизна,

$$N(s) = \varepsilon\int_{-1}^{1} \sigma_n^0\, d\zeta, \qquad T(s) = \varepsilon\int_{-1}^{1} \tau_{ns}^0\, d\zeta, \qquad z(s) = \varepsilon^2\int_{-1}^{1} \tau_{nz}\, d\zeta,$$

$$M(s) = \varepsilon\int_{-1}^{1} \sigma_n^0\zeta\, d\zeta, \qquad G(s) = \varepsilon\int_{-1}^{1} \tau_{ns}^0\zeta\, d\zeta,$$

$$d_1 = \frac{1}{\lambda^*+\mu^*}\int_{-1}^{1}\left[\frac{2\mu\lambda\mu^*}{\lambda+2\mu} - \lambda^*\mu\right]\zeta\, d\zeta, \qquad \mu_1^* = \int_{-1}^{1} \mu\zeta\, d\zeta,$$

$$d_2 = \int_{-1}^{1} \frac{4\mu(\lambda+\mu)}{\lambda+2\mu}(c_2\zeta - \zeta^2)\, d\zeta, \qquad \mu_2^* = \int_{-1}^{1} \mu\zeta^2\, d\zeta.$$

Решение краевой задачи (8) определяет внутреннее напряженное состояние с погрешностью порядка ε. Для плиты симметричного строения коэффициенты $\mu_1^*=c_2=d_1=0$ и задача (8) разбивается на две независимые задачи относительно функции Φ_1 и функции Φ_2. Первую можно рассматривать как задачу об обобщенном напряженном состоянии плиты с упругими параметрами λ^*, μ^*, вторую — как задачу изгиба.

Автор благодарен И. И. Воровичу за постановку задачи и внимание к работе.

Научно-исследовательский институт механики
и прикладной математики
Ростовского государственного университета

Поступило
30 VIII 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *О. К. Аксентян, И. И. Ворович,* ПММ, т. 27, в. 6 (1963). [2] *И. И. Ворович, О. С. Малкина,* ПММ, т. 31, в. 2 (1967). [3] *И. И. Ворович, И. Г. Кадомцев,* ПММ, т. 34, в. 6 (1970). [4] *О. К. Аксентян, Ю. А. Устинов,* ПММ, т. 36, в. 2 (1972). [5] *П. Ф. Папкович,* ДАН, т. 27, № 4 (1940). [6] *М. Г. Крейн, Г. К. Лангер,* О некоторых математических принципах линейной теории демпфированных колебаний континуумов. Прилож. теории функций в мех. сплошн. среды, т. 2, «Наука», 1965.