Доклады Академии наук СССР
1974. Том 215, № 5

УДК 519.21 *МАТЕМАТИКА*

Г. М. МОЛЧАН

L МАРКОВСКИЕ ГАУССОВСКИЕ ПОЛЯ *

(*Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 20 VI 1973*)

1. Пусть $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathscr{P})$ вероятностное пространство, H — сепарабельное гильбертово пространство с метрикой $(\cdot, \cdot)$, ξ: $H \to L^2(\Omega, \mathfrak{A}, \mathscr{P})$ — линейное непрерывное отображение или случайная функция 2-го порядка со средним $E\xi(h)=0$ и корреляционным функционалом $E\xi(h_1)\overline{\xi(h_2)}=(h_1, h_2)$. Функционал $\{\xi, H\}$ назовем полем в R^n, если каждому открытому подмножеству G в R^n поставлено в соответствие замкнутое подпространство $H(G)\subset H$ так, что $H(G)\subset H(G_1)$, если $G\subset G_1$; $H(R_n)=H$, $H(\emptyset)=\{0\}$; $H(G)=\overline{\cup H}(G\setminus\partial_\varepsilon G)$, $\varepsilon>0$, где $\partial_\varepsilon G$ — ε-окрестность границы ∂G области G. Для произвольного множества F в R^n определим подпространство $H(F)^+$ в H: $H(F)^+=\cap H(F_\varepsilon)$, $\varepsilon>0$, где F_ε—ε-окрестность F и σ-алгебру $\sigma(F)^+=\cap\sigma(F_\varepsilon)$, $\varepsilon>0$, где $\sigma(G)$ — наименьшая σ-подалгебра $\mathfrak{A}$, относительно которой измеримы случайные величины $\{\xi(h), h\in H(G)\}$.

Фиксируем некоторое семейство открытых множеств $\{G\}$ и замкнутую окрестность нуля L в R^n. Поле назовем L-*марковским* относительно $\{G\}$, если $\forall G$ алгебры $\sigma(G+L)^+$ и $\sigma(G^c+L)^+$ в сумме дают алгебру $\sigma(R^n)$ и условно независимы относительно L-граничной алгебры $\sigma(\partial_L G)^+$. Здесь и ниже $G^c=R^n\setminus G$, $G_1\pm G_2$ — арифметические сумма и разность множеств, $\partial_L G=\partial G+L$.

В настоящей заметке дается описание L-марковских гауссовских полей. Законченные результаты ранее получены в однородном случае для полей с дискретным временем в [1] и для линейно регулярных процессов в [2, 3]. Общий случай полей с марковским свойством, $L=\{0\}$, рассматривался автором в [4].

Поле $\{\xi, H\}$ назовем L-*зависимым* относительно семейства открытых множеств $\{G\}$ в R^n, если алгебры $\sigma(G\setminus\partial_L G)$ и $\sigma(G^c\setminus\partial_L G)$ независимы. Рассмотрим гильбертово пространство H^* линейных форм $l=(h, \cdot)$, $h\in H$ на H с естественной метрикой $\|l\|_*=\|h\|$. Случайную функцию ξ^*: $H^*\ni(h, \cdot)\to\xi(h)\in L^2(\Omega, \mathfrak{A}, \mathscr{P})$ на H^* назовем сопряженной $\{\xi, H\}$. Она остановится полем в R^n при следующем определении подпространств $H^*(G)\subset H^*$, отвечающих открытым множествам $G\subset R^n$: $H^*(G)=\{l\in H^*: \langle l, h\rangle=0, h\in H(G^c)^+\}$. Имеет место двойственность полей: $(\xi^*)^*=\xi$, $[H^*(G)]^*=H(G)$ и биортогональность: $E\xi^*(l)\overline{\xi(h)}=\langle l, h\rangle$, $\sigma(R^n|\xi^*)=\sigma(R^n|\xi)$. Для обычных полей H^* есть пространство, воспроизводимое ядром корреляционного оператора ξ; сопряженное поле ξ^* в случае дискретного времени есть неинтерполируемая компонента поля ξ: $\xi_t^*=\xi_t-\hat{E}\{\xi_t|\xi_s, t\neq s\}$, где $\hat{E}$ — оператор условного среднего в широком смысле. При этом надо требовать, чтобы $\sigma(R^n|\xi)=\sigma(R^n|\xi^*)$.

В дальнейшем все рассматриваемые поля считаются гауссовскими. Совокупность множеств $\{G\}$, если она состоит из всех открытых подмножеств R^n, в формулировках утверждений опускается.

Теорема 1. *Поле $\{\xi, H\}$ является L-марковским относительно семейства подмножеств $\{G\}$ в R^n тогда и только тогда, когда*: а) *сопряжен-*

---

* Работа докладывалась на Всесоюзном симпозиуме по статистике случайных процессов (Киев, июнь 1973 г.) [9].

ное ему поле L-зависимо относительно $\{G\}$; б) ξ ∂_L-регулярно, т. е. $H(G+L)^+ \cap H(G^c+L) \subseteq H(\partial_L G)^+$.

Первое условие эквивалентно $(L-L)$-локальности унитарного изоморфизма V: $(h, \cdot) \to h$ пространств H^* и H, т. е. если $\operatorname{supp} l \subset G \setminus \partial_L G$, или, что то же, $l \in H^*(G \setminus \partial_L G)$, то $\operatorname{supp} Vl \subseteq \overline{G}+L$ или $Vl \in H(G+L)^+$. Второе условие можно заменить требованием $H^*((\partial_L G)^c) = H^*(G \setminus \partial_L G) + H^*(G^c \setminus \partial_L G)$.

Теорема 1 является следствием данных определений и следующего факта: в гауссовском случае условие L-марковости поля равносильно ортогональному разложению пространства

$$H = [H(G+L)^+ \ominus H(\partial_L G)^+] \oplus H(G^c+L)^+.$$

Поле $\{\zeta, H\}$ назовем обобщенным, если пространство основных функций Л. Шварца $\Phi(R^n)$ вложено 1 : 1 непрерывно и плотно в H, причем $H(G)$ есть замыкание $\{\varphi \in \Phi(R^n), \operatorname{supp} \varphi \subset G\}$ в H.

Теорема 2. *Если сопряженное поле $\{\xi^*, H^*\}$ обобщенное, то следующие условия эквивалентны*: а) $\{\xi, H\}$ *— L-марковское*; б) $\{\xi^*, H^*\}$ *L-зависимое,* в) *метрика в H^* на плотном подмножестве $\Phi(R^n)$ имеет вид*

$$(\varphi, \psi)_* = \sum \iint a_{k,l}(x-y, y)\, \varphi^{(k)}(x)\, \psi^{(l)}(y)\, dx\, dy,$$

где k, l — мультииндексы вида $(k_1, \ldots, k_n)$, $\varphi^{(k)}$ — частная производная порядка $|k| = k_1 + \ldots k_n$, отвечающая k; функции $a_{k,l} \in L^1_{\text{лок}}(R^n \times R^n)$ и отличны от нуля в конечном числе на любом компакте; носители $\operatorname{supp} a_{k,l}(\cdot, y) \subseteq (L-L)$ для каждого фиксированного y. Если $L = \{0\}$, ядро билинейной формы $(\cdot, \cdot)_*$ определяется обобщенным дифференциальным оператором ([4]).

Это утверждение вытекает из непрерывности билинейной формы $(\cdot, \cdot)_*$ на пространстве $\Phi(R^n \times R^n)$ и теоремы 1.

Рассмотрим случай, когда одно из полей ξ и ξ^* является обобщенным и однородным. Если это условие выполнено для поля $\{\xi, H\}$, то H совпадает с замыканием $\Phi(R^n)$ в метрике $\|\varphi\|^2 = \int |\hat{\varphi}|^2 F(d\lambda)$, где $\hat{\varphi}$ — Фурье-преобразование φ, $F(d\lambda)$ — спектральная мера ξ не выше степенного роста: $\int (1+|\lambda|)^{-p} F(d\lambda) < \infty$ для некоторого $p \geq 0$. Пространство H^* состоит из обобщенных функций вида $\Phi(t) = \int e^{i(t,\lambda)} \check{\Phi}(d\lambda)$, где мера $\check{\Phi}(d\lambda) \prec F(d\lambda)$ и $\|\Phi\|_*^2 = \int |\Phi(d\lambda)|^2 / F(d\lambda)$. Из предыдущей теоремы получается как следствие

Теорема 3. *Если $1/f(\lambda)$ — спектр однородного обобщенного поля $\{\xi^*, H^*\}$, то условие L-марковости поля $\{\xi, H\}$ равносильно представлению $f(\lambda)$ в виде*

$$f(\lambda) = 1 \Big/ \sum_{0 \leq |k| \leq m} \lambda^k \int e^{i(t,\lambda)} \mu_k(dt),$$

где μ_k — конечные меры с носителями в $(L-L)$, $\lambda^k = \lambda_1^{k_1}, \ldots, \lambda_n^{k_n}$.

В случае $L = \{0\}$ $1/f$ есть полином ([4]).

Это предположение охватывает случаи обобщенных однородных и локально-однородных полей, для которых $1/f$ (f — спектр поля) имеет степенной рост. Отличным от них примером может служить поле со «спектром» $f(\lambda) = \prod (\lambda_i^2 / \sin^2 T\lambda_i)$, $i = 1, \ldots, n$. Поле определено на элементах вида $\psi * e_T$, где $\psi \in L^2(R^n)$, e_T — характеристическая функция куба K_T с ребром $2T$ и центром 0. Это поле L-марковское $(L = K_T)$ и сопряжено обычному однородному полю $\xi^*(t) = c e_T * b$, где b — «белый шум», $c = (8\pi)^{-n/2}$.

Свойство L-марковости относительно $\{G\}$ назовем невырожденным, если $\forall G$ алгебра $\sigma(\partial_L G)^+$ отлична от $\sigma(G+L)^+$ и $\sigma(G^c+L)^+$, когда $\partial_L G$ составляет правильную часть $\overline{G}+L$ и G^c+L.

Теорема 4. *Для того чтобы однородное обобщенное поле с абсолютно непрерывным спектром $f(\lambda)\, d\lambda$ обладало невырожденным L-марковским* *свойством относительно полупространств в R^n, необходимо и достаточно чтобы функция $1/f(\lambda)$ продолжалась до целой функции экспоненциального типа в C^n с P-индикатором:*

$$\sup_{\lambda}\varlimsup_{r\to\infty} r^{-1}\ln|f^{-1}(\lambda+ir\omega)|\leqslant \max\ \langle\omega, t\rangle,\ \omega\in R^n; \tag{1}$$

и $\ln f(\lambda+ir\omega)/(1+x^2)\in L^1(R_x^1)$ *при почти всех* λ *из плоскости* $\langle\lambda, \omega\rangle=0$.

Пусть W^2 — пространство целых функций, получаемых преобразованием Фурье финитных функций из $L^2(R^n)$. Определим $\bigvee$-supp $f\subset R^n$ для каждого $f\in W^2$ как носитель Фурье-преобразования f в L^2. Для произвольной целой функции экспоненциального типа, для которой множество $\{\varphi\in W^2\colon f\varphi\in W^2\}$ не пусто, будем говорить, что $\bigvee$-supp $f\subseteq F$, если $\bigvee$-supp $(\varphi\cdot f)\subseteq F+\bigvee$-supp φ для каждой допустимой функции $\varphi\in W^2$.

Теорема 5. *Для невырожденной L-марковости однородного поля со спектром $f(\lambda)$ необходимо, чтобы $1/f$ была целой функцией экспоненциального типа с $\bigvee$-supp $f^{-1}\subseteq L-L$ и существовали целые функции z_n: $|z_n(\lambda)|^2/f(\lambda)\in L^1$, $|z_n(\lambda+i\mu)|<e^{|\mu|/n}$; и достаточно, если дополнительно $z_n\to1$ равномерно на компактах в R^n.*

Замечание. Пусть, например, $f(\lambda)\geqslant g(|\lambda|)$, где $g(x)$ — монотонно убывающая функция и $|\ln g(x)|/(1+x^2)\in L^1$. Тогда существует целая функция $z\in W^2$, такая, что $|z(\varepsilon\lambda)|/f(\lambda)<c_\varepsilon$, $\varepsilon>0$ ([5]) и, следовательно, условие L-марковости равносильно условию $\bigvee$-supp $f^{-1}\subseteq L-L$. Этот случай рассмотрен в ([6]) для $L=\{0\}$ при несколько отличном определении носителя f^{-1}.

3. Остановимся на основных моментах доказательства наиболее существенной теоремы 4. Доказательство основано на следующих леммах.

Лемма 1. (Л. Де-Бранж, ([3])). *Пусть σ — мера на прямой,*

$$\int|\sigma(dx)|<\infty,\qquad \int e^{itx}\sigma(dx)=0,\qquad |t|<T.$$

Тогда для всякой целой функции экспоненциального типа $a<T$, $f(x)\in L_{|\sigma|}^1$ имеем:

а) $\int f(x)\sigma(dx)=0$;

б) $|f(z)|\leqslant c_0e^{T|z|}\|f\|_{1,|\sigma|}$, где $\|\cdot\|_{p,\sigma}$ — *норма в* L_σ^p.

Отсюда, используя теорему Фубини, получаем утверждение:

Лемма 2. *Пусть $f(\lambda)\in L^1(R^n)$, $\ln|f(\lambda'+x\omega)|/(1+x^2)\in L^1(R_x^1)$ при почти всех λ' из плоскости $\langle\lambda', \omega\rangle=0$, где ω — единичный вектор в R^n. Тогда пространство $L_f^p(T+, \omega)=\bigcap_\varepsilon L_f^p(T+, \varepsilon, \omega)$, $p\geqslant1$, где $L_f^p(T, \omega)$ — замыкание линеала экспонент $\{e^{i\langle t, \lambda\rangle}, |\langle t, \omega\rangle|<T\}$ в L^p с весом f, состоит из элементов $u\in L_f^p$, для которых функции $R^1\ni x\to u(\lambda'+x\omega)$ при почти всех λ' продолжается до целой функции экспоненциального типа степени $\leqslant T$.*

В теореме 4 требование невырожденности L-марковского свойства относительно полупространств $\{G\}$ означает, что $H(G+L)\ominus H(G)\neq\{0\}$. Отсюда вытекает $H(G)\ominus H(G^c)\neq\{0\}$, что равносильно условиям леммы 2. Дальнейшее доказательство необходимости почти дословно повторяет доказательство, предложенное в ([3]) для случая $n=1$. Оно приводит к условию аналитичности функции $1/f(\lambda'+z\omega)$ в C^1 при почти всех λ' из плоскости $\langle\lambda, \omega\rangle=0$ и всех ω. Отсюда с учетом теоремы Сичака ([7]) о сепаратно аналитических функциях следует аналитичность $1/f(\lambda)$ в C^n.

Остановимся на достаточности условий. Пусть для простоты $f(\lambda)=f(\lambda_1, \lambda_2)$, $\omega=(1, 0)$ и $f\in L^1(R^2)$. Пусть диаметр L в направлении ω равен $2T$ и $1/f(\lambda)$ — целая функция экспоненциального типа, порядок которой $\leqslant2T$ при каждом λ_2. Докажем ортогональность пространств $H(G+L)^+\ominus H(\partial_LG)^+$ и $H(G^c+L)^+\ominus H(\partial_LG)^+$, где $G=\{t=(t_1, t_2), t_1\leqslant0, |t_2|<\infty\}$ и множество ∂_LG — полоса ширины $2T$. В спектральных терминах задача эквивалентна доказательству ортогональности в L_f^2 элементов $h^\pm$, принадлежащих соответственно подпространствам $l^{\pm}(T)\ominus l^0(T+)$, где $l^0(T+)=$ $=L_f^2(T+,\omega)$, $l^\alpha(T)$, $\alpha=+,-$, — замыкания в L_f^2 линейных комбинаций экспонент $e^{i\langle t,\lambda\rangle}$, $t_1\leqslant T$, $|t_2|<\infty$, если $\alpha=-$, и $t_1\geqslant -T$, если $\alpha=+$. Допустим противное: $(h^+,h^-)_f\neq 0$, $(\cdot,\cdot)_f$ — метрика в L_f^2, для некоторых $h^\alpha\in l^\alpha(T)$. Можно считать, что $h^\alpha=g^\alpha+\varphi^\alpha$, где $g^\alpha=\sum e^{it_k\lambda_1}\psi_k(\lambda_2)\in l^{\pm}(T)$, $k<N$, $t_k<T$ для g^- и $t_k\geqslant -T$ для g^+, а $\varphi^{\pm}\in l^0(T+)$, т. е. по лемме 2 $\varphi^{\pm}(\cdot,\lambda_2)$, для почти всех λ_2 целые функции степени T. Это следует из плотности тригонометрических полиномов по λ_1 в $l^{\pm}(T)$.

По теореме Фубини найдем множество $\delta(\lambda_2)$ на прямой λ_2, $\operatorname{mes}\delta(\lambda_2)>$ >0, что $(h^+,h^-)_{f(\cdot,\lambda_2)}\neq 0$, $\lambda_2\in\delta(\lambda_2)$ и $\|h^{\pm}\|_{f(\cdot,\lambda_2)}\neq 0$. (Здесь $(\cdot,\cdot)_{f(\cdot,\lambda_2)}$ — метрика в L^2 с весом $f(\cdot,\lambda_2)$, λ_2 — фиксировано.) С другой стороны, из $(h^{\pm},\psi e^{it_2\lambda_2})_f=0$, $\psi\in l^0(T+)$, $|t_2|<\infty$, находим, что для всех $\lambda_2\in\delta_1(\lambda_2)=$ $=\delta\setminus\delta_0$, где $\operatorname{mes}\delta_0(\lambda_2)=0$ и любого фиксированного счетного набора $\psi_n\in$ $\in l^0(T+)$, $(h^{\pm},\varphi_n)_{f(\cdot,\lambda_2)}=0$; $\ln f(x,\lambda_2)/(1+x^2)\in L^1(R_x^1)$.

Пусть Δ — достаточно малый отрезок на оси λ_2, такой, что $\Delta\cap\delta_1(\lambda_2)=$ $=\delta_2(\lambda_2)$, $\operatorname{mes}\delta_2(\lambda_2)>0$. Последовательность ψ_n можно выбрать так, чтобы функции $\lambda_1\to\psi_n(\lambda_1,\lambda_2)$ для всех $\lambda_2\in\delta_2(\lambda_2)$, исключая множество меры нуль, задавали базис в $l^0(T+|\lambda_2)$. (Пространства $l^\alpha(T|\lambda_2)$ $\alpha=+,-,0$, определяются аналогично $l^\alpha(T)$ для веса $f(\cdot,\lambda_2)$.) Действительно, пусть $\omega(z,\lambda_2)$ — целая функция z с нулями $z_n(\lambda_2)$ в верхней полуплоскости, для которой $|\omega(\lambda_1,\lambda_2)|^2=f^{-1}(\lambda_1,\lambda_2)$ п.н. по λ_2. Существование такой функции вытекает из теоремы Н. И. Ахиезера и условия невырожденности марковского свойства. В силу гладкости f^{-1} и $\omega(z,\lambda_2)$, нули $z_n(\lambda_2)$, взятые с учетом кратности, могут быть выбраны на отрезке Δ так, чтобы $z_n(\lambda_2)$ были измеримы на Δ. Определим функции

$$\psi_n=\sqrt{\operatorname{Im} z_n(\lambda_2)}\,\omega(\lambda_1,\lambda_2)\prod_{1\leqslant i\leqslant n-1}\frac{\lambda_1-\bar z_i(\lambda_2)}{\lambda_1-z_i(\lambda_2)}\,\frac{c(\lambda_2)}{\lambda_1-z_n(\lambda_2)}$$

где $c(\lambda_2)$ — характеристическая функция множества $\delta_2(\lambda_2)$ функции $\psi_n(\lambda)\in L_f^2$ и согласно ([8]) образуют базис в $l^0(T|\lambda_2)$. Таким образом, мы построили ненулевые элементы $h^{\pm}(\cdot,\lambda_2)\in l^{\pm}(T|\lambda_2)\ominus l^0(T+|\lambda_2)$, $\lambda_2\in\delta_3(\lambda_3)$, $\operatorname{mes}\delta_3>0$, для которых $(h^+,h^-)_{f(\cdot,\lambda_2)}\neq 0$. Это невозможно в силу того, что $1/f(z,\lambda_2)$ — целая функция переменного z, степени $2T$ ([2, 3]).

В заключение автор благодарит Ю. К. Беляева и А. М. Яглома за внимание к работе.

Институт физики Земли им. О. Ю. Шмидта
Академии наук СССР
Москва

Поступило
14 VI 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *Ю. А. Розанов*, Теор. вероятн. и ее примен., т. 12, № 3 (1967). [2] *N. Levinson, H. P. McKean*, Acta Math., v. 112, 99 (1964). [3] *L. D. Pitt*, J. Multivar. Anal., v. 2, 145 (1972). [4] *Г. М. Молчан*, ДАН, т. 197, № 4 (1971). [5] *Л. И. Ронкин*, ДАН, т. 42, № 5 (1956). [6] *Sh. Kotani*, 2 Japan-USSR Symposium on Prob. Theory, 3, Kyoto, August, 1972; *J. Siciak*, Ann. Pol. Math., v. 22 (1969). [8] *В. П. Гурарий*, Матем. сборн. (нов. сер.), т. 58, 439 (1962). [9] *Г. М. Молчан*, Материалы Всесоюзн. симпозиума по статистике случайных процессов, Киев, 1973, стр. 132.