Доклады Академии наук СССР
1974. Том 216, № 4

УДК 519.52:517.51

МАТЕМАТИКА

Г. В. ЧУДНОВСКИЙ

ТРАНСВЕРСАЛИ И СВОЙСТВА ТИПА КОМПАКТНОСТИ

(Представлено академиком В. М. Глушковым 16 XI 1973)

Методы инфинитарных языков и больших кардиналов применяются здесь к исследованию ряда теоретико-множественных проблем Эрдеша — Хайнала [1, 4] и [2] о трансверсалях и множественных системах.

1. Воспользуемся понятиями и обозначениями из [1, 2, 6]. Система множеств $\mathfrak{X}=\langle X_i\rangle_{i\in I}$ имеет трансверсаль S, если $|S\cap X_i|=1$ при $i\in I$. Следствием теоремы компактности Гёделя — Мальцева является утверждение

(C) Если $\mathfrak{X}=\langle X_\xi\rangle_{\xi<\alpha}$ — система конечных множеств и для каждого конечного $S\subset\alpha\ \mathfrak{X}\restriction S=\langle X_i\rangle_{i\in S}$ имеет трансверсаль, то и $\mathfrak{X}$ имеет трансверсаль.

Как показывают результаты настоящей работы, между компактностными результатами и теоремами о трансверсалях существует более тесная связь.

Утверждение (C) привело Эрдеша и Хайнала [1] к исследованию следующих свойств $E(\varkappa,\lambda)$ и, соответственно, $F(\varkappa,\lambda)$ (в обозначениях [2]).

Для любой системы $\mathfrak{X}=\langle X_\xi\rangle_{\xi<\varkappa}$ множеств мощности $<\lambda$ (и $=\lambda$ соответственно) из существования трансверсали для каждой подсистемы $\mathfrak{X}\restriction\zeta=\langle X_\xi\rangle_{\xi<\zeta}$ при $\zeta<\varkappa$ следует существование трансверсали для всей системы $\mathfrak{X}$.

Если $\mathfrak{F}=\langle F_i\rangle_{i\in I}$ — система множеств, то пишем $|\mathfrak{F}|=m$ при $|I|=m$; через $p^*(\mathfrak{F})\leqslant m$ обозначается тот факт, что $|F_i|\leqslant m$ для всех $i\in I$, а через $p(\mathfrak{F})=m$ — что $|F_i|=m$ при $i\in I$. Система $\mathfrak{F}$ удовлетворяет свойству $B(s)$, где s — кардинальное число, $s\geqslant 2$, если существует множество B такое, что $F\cap B\neq 0$ и $|F\cap B|<s$ для всех $F\in\mathfrak{F}$. Символ $S(m,p,r)\to B(s)$ означает следующее: если $\mathfrak{F}$ — система множеств, $|\mathfrak{F}|=m$, $p(\mathfrak{F})=p$ такая, что всякая ее подсистема $\mathfrak{F}'\subset\mathfrak{F}$, $|\mathfrak{F}'|<m$ удовлетворяет свойству $B(r)$, то сама $\mathfrak{F}$ удовлетворяет свойству $B(s)$.

Лемма 1. 1) *Свойства* $F(\varkappa,\lambda)$ и $S(\varkappa,\lambda,2)\to B(2)$ *эквивалентны.*

2) *Для любого* λ $E(\varkappa,\lambda^+)$ *эквивалентны* $F(\varkappa,\lambda)$, *где* λ^+ — *наследник* λ.

Наибольшее внимание в исследовании этих свойств уделяется свойству $S(m,\aleph_0,r)\to B(s)$ или же $E(\varkappa,\aleph_1)$ (т. е. $F(\varkappa,\aleph_0)$), поскольку, согласно (C), уже $E(\varkappa,\aleph_0)$ всегда имеет место. Теорема Миллера [3] (ср. [1]) показывает, что при континуум-гипотезе $2^{\aleph_0}=\aleph_1$ (CH)

$$S(\aleph_1,\aleph_0,2)\not\to B(\aleph_0),\tag{1}$$

т. е., в частности, $E(\aleph_1,\aleph_1)$ или $F(\aleph_1,\aleph_1)$ ложно. В предположении обобщенной континуум-гипотезы (CCH) в теореме 10 из [1] доказывается

$$S(\aleph_2,\aleph_0,4)\not\to B(4).\tag{2}$$

Затем в [1] (ср. также [4]) формулируются еще несколько вопросов:

$$S(\aleph_2,\aleph_0,2)\to B(2)\quad\text{или}\quad\text{же}\quad F(\aleph_2,\aleph_0)?\tag{3}$$

$$S(\aleph_2,\aleph_0,4)\to B(5)?\tag{4}$$

При $2^{\aleph_0}=\aleph_2$ в [2] дан отрицательный ответ на вопрос (3). Ниже даются отрицательные ответы на вопросы (3) и (4) без всяких дополнительных предположений. Работа [1] содержит также следующую задачу: имеет ли при $2 \leqslant r < \omega$ место

$$S(\aleph_\omega, \aleph_0, r) \to B(r)? \tag{5}$$

Мы покажем, что ответ и на (5) отрицателен.

2. В основе приводимой характеристики свойств Эрдеша — Хайнала лежат свойства компактности инфинитарных языков. Пусть для регулярного α $L_{\alpha,\omega}$ — инфинитарный язык, полученный добавлением к обычному языку первого порядка конъюнкций и дизъюнкций по $<\alpha$ формулам. Язык $L_{\alpha,\omega}$ называется (m, n)-компактным, если для любого множества Σ аксиом $L_{\alpha,\omega}$ (т. е. формул без свободных переменных), $|\Sigma| \leqslant m$, из существования моделей для всех подсистем $\Sigma' \subset \Sigma$, $|\Sigma'| < n$ следует существование модели для всей Σ. В первую очередь нас интересуют слабо компактные кардиналы m, т. е. такие, что язык $L_{\omega_1,\omega}$ (m, m)-компактен. Такие кардиналы (ср. ([6])) являются большими слабо недостижимыми кардиналами.

Теорема 1. *Следующие условия эквивалентны:*

(I) *язык $L_{\alpha,\omega}$ (m, m)-компактен;*

(II) *для любой системы $\{A_{i,j}: j \in J_i\}$, $i \in I$, подмножеств $S_m(m) = \{X \subset m: |X| < m\}$ с $|I| \leqslant m$, $|J_i| < \alpha$ для $i \in I$ такой, что $\bigcup_{j \in J_i} A_{i,j} = S_m(m)$: $i \in I$, существует на $S_m(m)$ ультрафильтр D, для которого $\{S \in S_m(m): \xi \in S\} \in D$ при $\xi < m$ и $A_{i,f(i)} \in D$ при $i \in I$ и $f \in \prod_{i \in I} J_i$;*

(III) *для каждого $P \in S_\omega(m) = \{X \subset m: |X| < \aleph_0\}$ пусть $M_P \subset {}^P\alpha$, $|M_P| < \alpha$ — семейство функций со следующим свойством: если $S \in S_m(m)$, то для некоторой функции $g_S \in {}^S\alpha$ имеем $g_S \restriction P \in M_P$ при $P \in S_\omega(S)$. В этом случае существует функция $g \in {}^m\alpha$, у которой $g \restriction P \in M_P$ при $P \in S_\omega(m)$.*

Доказательство. С помощью стандартной процедуры доказывается, что условие (m, m)-компактности $L_{\alpha,\omega}$ влечет (II) и (III), см. ([6], [7]).

Покажем, что (III) влечет (II). Пусть $\{A_{i,j}: j \in J_i\}$, $i \in I$, — такая система подмножеств $S_m(m)$, что $\bigcup_{j \in J_i} A_{i,j} = S_m(m)$, $|J_i| < \alpha$ при $i \in I$ и $|I| = m$. Для доказательства существования искомого в (II) ультрафильтра D достаточно показать, что для некоторого $f \in \prod_{i \in I} J_i$ система $\{A_{i,f(i)}: i \in I\} \cup \{S \in S_m(m): \xi \in S\}: \xi < m$ центрирована. Предположим, что для $P \in S_\omega(I)$ M_P состоит из таких функций $h \in \prod_{i \in P} J_i$, что система подмножеств $S_m(m)$: $\{A_{i,f(i)}: i \in P\} \cup \{S \in S_m(m): \xi \in S\}: \xi < m$ центрирована. Учитывая (III), находим нужную функцию $f \in \prod_{i \in I} J_i$, а вместе с ней и ультрафильтр D на $S_m(m)$.

Доказательство того, что из (II) следует (n, m)-компактность $L_{\alpha,\omega}$, проводится методом ультрапроизведений с использованием теоремы Лося. Для этого можно применить схему, предложенную Сильвером ([6]).

Замечание. Условие (II) является примером использования так называемых матриц множеств ([5]). Аналоги же условия (III) (впрочем, лишь для двузначных функций) рассматривались очень часто в связи с логическими вариантами компактностных теорем. В ([7]) они называются теоремами об оценках.

Теорема 2. *Утверждение $E(\varkappa, \alpha)$ эквивалентно $(\varkappa, \varkappa)$-компактности $L_{\alpha,\omega}$.*

Доказательство. Очевидно, что из $(\varkappa, \varkappa)$-компактности $L_{\alpha,\omega}$ вытекает $E(\varkappa, \alpha)$. Предположим, что $L_{\alpha,\omega}$ не $(\varkappa, \varkappa)$-компактно. Согласно теореме 2, (III), получаем такое $M_P \subset {}^P\alpha$, $|M_P| < \alpha$: $P \in S_\omega(m)$, что при $S \in S_m(m)$ для некоторого $g_S \in {}^S\alpha$ $g_S \restriction P \in M_P$, как только $P \in S_\omega(S)$. Однако ни для какого $g \in {}^m\alpha$ $g \restriction P \in M_P$ при $P \in S_\omega(m)$.

Покажем $\neg E(\varkappa, \alpha)$. Для этого при $P_1 \subset P_2 \in S_\omega(m)$, $t_i \in M_{P_i}$: $i = 1, 2$ и $t_2 \restriction P_1 \neq t_1$ обозначим через M_{t_1,t_2} максимальное множество несравнимых элементов $M_{P_1}\cup M_{P_2}$, содержащее t_1 и t_2. Здесь две функции $f_i \in M_{P_i}$ сравнимы, если $f_2 \restriction P_2 = f_1$.

Теперь $\mathfrak{X} = \langle M_P, M_{t_1, t_2}: P\in S_\omega(m), t_i \in M_{P_i}, P_1 \subset P_2, t_2 \restriction P_1 \neq t_1 \rangle$ — семейство множеств, для которого свойство $E(\varkappa, \alpha)$ нарушается. В самом деле, согласно $|M_P|<\alpha$, при $P\in S_\omega(m)$ получаем $|F|<\alpha$ для $F\in\mathfrak{X}$. Покажем, что всякая часть $\mathfrak{X}'\subset\mathfrak{X}$, $|\mathfrak{X}'|<m$ имеет трансверсаль. Нетрудно заметить, что для некоторого $S\in S_m(m)$ $\bigcup\limits_{X\in\mathfrak{X}'} X \subset {}^S\alpha$. Выбираем $g_S\in{}^S\alpha$ такое, что $g_S \restriction P \in M_P$ при $P\in S_\omega(S)$. В этом случае $B_S=\{g_S \restriction P: P\in S_\omega(S)\}$ — трансверсаль. В самом деле, $|M_P\cap B_S|=1$ при $P\subset S$ и $|M_{t_1, t_2}\cap B_S|<2$, так как все элементы M_{t_1, t_2} несравнимы. Пусть $P_1\subset P_2 \in S_\omega(S)$ и $t_i\in M_{P_i}$: $i=1, 2$, $t_2 \restriction P_1\neq t_1$. Если $g_S \restriction P_2 \notin M_{t_1, t_2}$, то по определению M_{t_1, t_2} существует $t\in M_{t_1, t_2}$, сравнимое с $g_S\restriction P_2$. Если $t\in M_{P_2}$, то $g_S \restriction P_2 = t$, а если же $t\in M_{P_1}$, то понятно $t=g_S \restriction P_1 \in B_S$. Итак, $|M_{t_1, t_2}\cap B_S|=1$ и B_S — трансверсаль для $\mathfrak{X}$.

Однако для $\mathfrak{X}$ трансверсали не будет. Действительно, пусть B — трансверсаль для $\mathfrak{X}$. Берем $\chi_P\in B\cap M_P$ для $P\in S_\omega(m)$. Покажем, что все χ_P сравнимы, т.е., что $\chi_P(\xi)=\chi_{P'}(\xi)$ для $\xi\in P\cap P'$. Пусть $P\subset P'\in S_\omega(m)$, а χ_P и $\chi_{P'}$ несравнимы. Тогда $\{\chi_P, \chi_{P'}\}\subset B\cap M_{\chi_P, \chi_{P'}}$ и B — не трансверсаль. Отсюда вытекает сравнимость всех χ_P, т. е. для некоторой функции $g\in{}^m\alpha$ $g\restriction P=\chi_P$: $P\in S_\omega(m)$. Это противоречит выбору семейства M_P, так как $g\restriction P=\chi_P\in M_P$.

Следствие 1. *Слабая компактность m и $E(m, \aleph_1)$* (т. е. $F(m, \aleph_0)$) *эквивалентны.*

3. Пользуясь методом доказательства теоремы 2 (ср. также [2]), можно установить, что справедлива

Теорема 3. *Пусть r — целое число, $r\geqslant 2$. Тогда $S(m, p, r)\to B(r)$ и (m, m)-компактность $L_{p^+,\omega}$ эквивалентны.*

Для доказательства достаточно положить вместо $M_{t_1, t_2}\in\mathfrak{X}$, что $M^*_{t_1,t_2} = M_{t_1, t_2}\cup M_{P_1}\cup\ldots\cup M_{P_{r-2}}\in\mathfrak{X}$ при различных $P_1, \ldots, P_{r-2}\in S_\omega(m)$. Тогда из не (m, m)-компактности $L_{p^+,\omega}$ вытекает $S(m, p, r)\not\to B(r)$ для любого целого $r\geqslant 2$.

Полученные теоремы 2 и 3 дают отрицательные ответы на вопросы (3) и (5).

Ответ на вопрос (4) также отрицателен.

Предложение 1. *Если $L_{p^+,\omega}$ не (m, m)-компактен, то $S(m, p, 2)\not\to B(\aleph_0)$ при $m^{\aleph_0}=m$.*

Кроме того имеет место $S(\aleph_2, \aleph_0, 2)\not\to B(r)$ для всех целых $r\geqslant 2$. Это утверждение является следствием более общего предложения.

Предложение 2. *Если $L_{p^+,\omega}$ не (m, m)-компактен, то $S(m, p, 2)\not\to B(r)$ для всякого r, $2\leqslant r<\omega$.*

Из результатов настоящей работы непосредственно вытекают все теоремы [2], поскольку при (ССН) (m, m)-компактность $L_{m,\omega}$ эквивалентна компактности m и $L_{m,\omega}$ не (m^n, m^n)-компактен для $m\geqslant n$.

Можно установить, наконец, общее утверждение о (m, n)-компактности.

Теорема 4. *Следующие условия эквивалентны:*

а) *язык $L_{\alpha,\omega}$ (m, n)-компактен;*

б) *для любой системы множеств $\mathfrak{F}$, $|\mathfrak{F}|\leqslant m$, $p^*(\mathfrak{F})<\alpha$ из существования трансверсали для каждого $\mathfrak{F}'\subset\mathfrak{F}$, $|\mathfrak{F}|<n$ следует существование трансверсали для $\mathfrak{F}$.*

Киевский государственный университет
им. Т. Г. Шевченко

Поступило
22 X 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *P. Erdos, A. Hajnal*, Acta Math. Acad. Sci. Hung., v. 12, 87 (1961). [2] *B. Weglorz*, Fund. Math., v. 77, № 3, 295 (1973). [3] *E. Miller*, C. R. Varsovie, v. 30, 31 (1937). [4] *P. Erdos, A. Hajnal*, Proc. Symp. Pure Math., v. 13, № 1 (1971). [5] *Г. В. Чудновский, Д. В. Чудновский*, ДАН, т. 198, № 4 (1971). [6] *I. Silver*, Ann. Math. Logic, v. 3, 45 (1971). [7] *А. Робинсон*, Введение в теорию моделей и метаматематику алгебры, М., 1968.