

Ю. Б. РАДВОГИН

ЗАВИСИМОСТЬ ОТХОДА УДАРНОЙ ВОЛНЫ ОТ ЧИСЛА МАХА НАБЕГАЮЩЕГО ПОТОКА

(Представлено академиком Л. И. Седовым 8 VIII 1973)

1. Как известно, при обтекании затупленного тела сверхзвуковым потоком невязкого газа образуется отошедшая ударная волна. Для осесимметрических течений одной из основных ее характеристик является расстояние ϵ между телом и волной, измеренное вдоль оси симметрии. Эта величина, как показывают расчетные и экспериментальные данные, весьма сложно зависит от формы тела и от M_∞ — числа Маха набегающего потока.

Для заостренных тел тип ударной волны определяется величиной полуугла заострения β . Каждому значению M_∞ отвечает некоторое $\beta_{кр}(M_\infty)$, такое, что при $\beta > \beta_{кр}$ волна обязана быть отошедшей. Такой режим обтекания принято называть закритическим. Функция $\beta_{кр}(M_\infty)$ может быть найдена из рассмотрения конического течения с наклоном ударной волны, соответствующим максимальному углу поворота потока (см., например, (1)).

Анализ результатов многочисленных расчетов показал, что между этими двумя функциями $\epsilon(M_\infty)$ и $\beta_{кр}(M_\infty)$, которые относятся к различным задачам аэродинамики, существует замечательная связь.

2. Для каждого M_∞ присоединим к рассматриваемому затупленному телу S касательный критический конус $Q_s^* = Q_s(\beta_{кр})$, т. е. конус с $\beta = \beta_{кр}$. Обозначим через $\delta_{кр}$ расстояние от вершины этого конуса до S (оно определяется простым геометрическим построением (рис. 1). Тогда имеет место соотношение

$$\delta_{кр} = k\epsilon, \quad (1)$$

где k зависит только от формы тела.

Это соотношение имеет вид своеобразного закона подобия: каждое тело характеризуется безразмерной константой k такой, что $\delta_{кр}/\epsilon = k$ вне зависимости от M_∞ .

Формула (1), разумеется, является приближенной. Для того чтобы судить о диапазоне ее применимости, воспользуемся имеющимися данными и составим таблицы отношений $\delta_{кр}/\epsilon$ для различных тел (табл. 1, 2).

В табл. 2 $A-E$ — поверхности вращения $r^2 = 2z + qz^2$; A — параболоид ($q=0$), B — эллипсоид ($q=-0,25$); $C-E$ — гиперboloиды с наклонами

Таблица 1

Отношение $\delta_{кр}/\epsilon$ для сферы

M_∞	$\delta_{кр}/\epsilon$	M_∞	$\delta_{кр}/\epsilon$	M_∞	$\delta_{кр}/\epsilon$	M_∞	$\delta_{кр}/\epsilon$
1,2	1,57	1,5	1,59	4,0	1,60	10,0	1,60
1,3	1,58	2,0	1,60	6,0	1,60	15,0	1,60
1,4	1,58	3,0	1,60	8,0	1,60	20,0	1,60

Примечание. ϵ — из расчетов В. Н. Ивановой и автора (1).

асимптот α , равными соответственно 10° , 25° и 35° ($q = \operatorname{tg}^2 \alpha$); F — тело формы $r = z^{1/2}$.

Указанное отношение было вычислено также для цилиндра, поставленного торцом к набегающему потоку. Приведенный в ⁽³⁾ графический материал, дал одинаковые значения $\delta_{кр}/\varepsilon = 1,4$ при $M_\infty = 1,5; 2,0; 3,0; 4,1; 14,1$ (ср. с константой для тела F).

Все расчеты относились к идеальному газу с $\gamma = 1,4$.

3. Приведенные данные позволят судить о границах применимости (1). Сформулируем в виде гипотезы то основное ограничение, налагаемое на

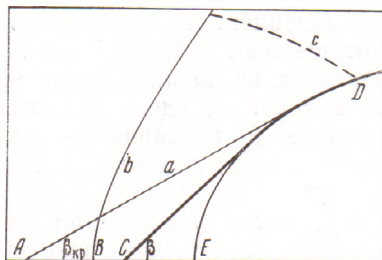


Рис. 1

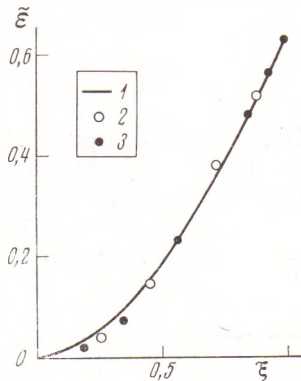


Рис. 2

Рис. 1. Иллюстрация обозначений. a — касательный критический конус, e — ударная волна, c — звуковая линия, $AC = \delta$, $BC = \varepsilon$, $AE = \delta_{кр}$, D — звуковая точка

Рис. 2. Отход ударной волны. 1 — $\varepsilon_0(\xi)$; 2, 3 — данные численных экспериментов для $M_\infty = 2$ (2) и $M_\infty = 6$ (3)

Форму тела и диапазон изменения M_∞ , при котором соотношение (1) выполняется с удовлетворительной точностью.

Звуковая точка* должна находиться на таком участке тела, что присоединение касательного критического конуса не приведет к значительному ее перемещению.

Т а б л и ц а 2

Отношение $\delta_{кр}/\varepsilon$ для некоторых тел

Тело S	$M_\infty = 2$	$M_\infty = 4$	$M_\infty = 6$	$M_\infty = 10$	$M_\infty = 20$	Тело S	$M_\infty = 2$	$M_\infty = 4$	$M_\infty = 6$	$M_\infty = 10$	$M_\infty = 20$
A	1,65	1,63	1,63	1,62	1,62	D	1,68	1,63	1,63	—	1,63
B	1,63	1,63	1,62	—	1,60	E	—	1,68	1,79	—	—
C	1,65	1,64	1,63	—	1,62	F	1,43	1,43	1,43	—	1,43

Примечание. Все значения ε взяты из ⁽²⁾.

Ответ на вопрос о смещении звуковой точки обычно ясен из интуитивных, геометрических соображений. Например, для эллипсоида, сжатого в направлении набегающего потока, присоединение критического конуса не приводит к сдвигу звуковой точки, так как для обоих этих тел она располагается вблизи верхней вершины эллипсоида. Напротив, гиперboloид с большим углом полураствора асимптотического конуса (тело E в табл. 2) дает пример тела, для которого обсуждаемый закон подобия неприменим, так как в силу близости $\beta_{кр}$ и α надстроенная поверхность становится похожей на бесконечный конус, а значит, звуковая точка должна переме-

* Т. е. точка пересечения звуковой линии с телом.

ститься на значительное расстояние. Заметим, что почти во всех рассмотренных выше течениях точка касания критического конуса с телом расположена перед звуковой точкой. Лишь для сферы при $M_\infty < 3$ их взаимное расположение меняется и поэтому звуковая точка обязана сдвигаться, хотя и на небольшое расстояние. Этим может быть объяснено некоторое уменьшение $\delta_{кр}/\varepsilon$ при M_∞ , близких к единице.

4. Изучение закритических обтеканий некоторого класса заостренных тел ⁽⁴⁾ показало, что и в этом случае отход ударной волны подчиняется (приближенно) аналогичному закону подобия.

Рассмотрим заостренное тело, образованное присоединением к исходной затупленной поверхности S касательного конуса $Q_s(\beta)$, где β — угол его полураствора. Ясно, что $\varepsilon = \varepsilon(M_\infty, \beta)$. Введем вместо β и ε безразмерные переменные $\xi = \delta/\delta_{кр}$ и $\bar{\varepsilon} = \varepsilon/\delta_{кр}$, $\delta(\beta)$ — расстояние между вершинами конусов $Q_s(\beta)$ и $Q_s(\beta_{кр})$, $\delta_{кр} = \delta(\pi/2)$. Тогда, вообще говоря, $\bar{\varepsilon} = \bar{\varepsilon}(M_\infty, \xi)$, причем значению $\xi = 0$ отвечает $\beta = \beta_{кр}$, а $\xi = 1 - \beta = \pi/2$.

Оказалось, что $\bar{\varepsilon}$ не зависит от M_∞ .

Более того, удалось получить для $\bar{\varepsilon}(\xi)$ эффективную формулу, основанную лишь на минимальных данных о ее поведении в окрестностях $\xi = 0$ и $\xi = 1$. Численные эксперименты показали, что $\bar{\varepsilon}(0) = \bar{\varepsilon}'(0) = 0$. Аппроксимируем $\bar{\varepsilon}(\xi)$ на всем интервале многочленом $\bar{\varepsilon}_0(\xi) = a\xi^2 + b\xi^3$ и подберем коэффициенты так, чтобы удовлетворить двум условиям на правом конце:

А. $\bar{\varepsilon}_0(1) = 1/k$; Б. $\bar{\varepsilon}_0'(1) = 1$.

Условие А суть соотношение (1). Для получения Б заметим, что волна не реагирует на заострение, близкое к $\pi/2$, т. е.

$$\frac{d}{d\xi} \left(\frac{\delta - \varepsilon}{\delta_{кр}} \right) = \frac{d}{d\xi} (\xi - \bar{\varepsilon}) = 0 \quad \text{при } \xi = 1.$$

Проведя выкладки, получим

$$\bar{\varepsilon}_0(\xi) = \xi^2 [3/k - 1 - \xi(2/k - 1)]. \quad (2)$$

На рис. 2 представлен график этой функции (сплошная линия) для $k = 1,60$. Там же нанесены значения $\bar{\varepsilon}(\xi)$, взятые из расчетов закритического обтекания конически заостренных тел. Видно, что все эти значения принадлежат одной и той же функции, хорошее приближение к которой (особенно при $\xi > 0,5$) дает $\bar{\varepsilon}_0(\xi)$.

Таблица 3

Отношение $\delta_{кр}/\varepsilon$ для плоских течений

Тело S	$M_\infty = 2$	$M_\infty = 4$	$M_\infty = 6$	$M_\infty = 10$	$M_\infty = 20$
Круговой цилиндр	1,17	1,10	1,08	1,07	1,06
Параболический цилиндр	—	1,09	1,06	—	1,05

Примечание. ε взяты из работы ⁽²⁾.

5. Подчеркнем еще раз интересные свойства введенных величин. Определяемое весьма просто «удлинение» $\delta_{кр}$ учитывает как форму тела, так и скорость набегающего потока и отражает существенные свойства течений. Переменная ξ удачно униформизирует сложную функцию $\varepsilon(M_\infty, \beta)$, уменьшая число определяющих параметров и делая их более обозримыми.

Представляется вероятным, что и некоторые другие характеристики течения также могут быть связаны с $\beta_{кр}$, $\delta_{кр}$ и ξ .

6. Попытка распространить соотношение (1) на плоские течения оказалась менее успешной (использовались, разумеется, значения $\delta_{кр}$ для клина). Приведем некоторые результаты этой проверки (табл. 3).

Различие в поведении $\delta_{кр}/\epsilon$ для плоских и осесимметрических течений связано, по-видимому, с нарушением условия, сформулированного в п. 3.

Отметим также (см. табл. 3), что $\delta_{кр}$ близко к ϵ .

Течения заостренных тел рассчитывались с помощью метода ⁽³⁾. Пользуясь случаем выразить признательность В. Н. Ивановой за составление программы и проведение расчетов.

Институт прикладной математики
Академии наук СССР
Москва

Поступило
9 VII 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Н. Ф. Краснов, Аэродинамика тел вращения, М., 1958. ² А. Н. Любимов, В. В. Русанов, Течения газа около тупых тел, т. 2, М., 1970. ³ О. М. Белоцерковский, Сборн. Численные методы решения задач механики сплошных сред, М., 1969. ⁴ В. Н. Иванова, Ю. Б. Радвогин, Препринт Инст. прикл. матем. АН СССР. № 57 (1973). ⁵ К. И. Бабенко, В. Н. Иванова и др., Тр. II Республиканск. конфер. по аэрогидромеханике, теплообмену и массообмену, Киев, 1971.