Доклады Академии наук СССР
1974. Том 215, № 5

УДК 513:88

МАТЕМАТИКА

А. М. РУБИНОВ

О МЕРАХ, МАКСИМАЛЬНЫХ В УПОРЯДОЧЕНИИ ШОКЕ

(*Представлено академиком С. Л. Соболевым 15 X 1973*)

Один из основных вопросов теории Шоке заключается в изучении максимальных в упорядочении Шоке мер и описании тех множеств, на которых эти меры сосредоточены. В работе дается характеристика таких множеств в терминах «граничных свойств». Основным инструментом для этого служит теорема, позволяющая судить о максимальности меры с помощью «почти пиковых» функций. Указана связь носителей максимальных мер с границей Шоке.

1. Рассмотрим пространство $C(Q)$ всех вещественных непрерывных функций, определенных на хаусдорфовом компактном топологическом пространстве Q, и простанство $C'(Q)$ всех борелевских регулярных мер на Q. Считаем, что $C(Q)$ и $C'(Q)$ упорядочены естественным образом. Если H — конус (=выпуклый конус) в $C(Q)$ и $\mu\in C'(Q)$, $\mu\geqslant 0$, то полагают [1] $\operatorname{Spr}(\mu, H)=\{\nu\in C'(Q):\ \nu\geqslant 0,\ \nu(h)\geqslant\mu(h)$ для всех $h\in H\}$. Мера $\mu\geqslant 0$ называется H-максимальной, если $\operatorname{Spr}(\mu, H)=\{\mu\}$. Через $\mathfrak{M}(H)$ обозначается совокупность всех H-максимальных вероятностных мер. Множество $\operatorname{Ch}(H)=\{t\in Q:\ \varepsilon_t\in\mathfrak{M}(H)\}$ называется границей Шоке конуса H.

2. Множество B называется границей конуса H, если

$$\sup_{t\in B} h(t)=\sup_{t\in Q} h(t)\qquad \text{для всех } h\in H.$$

Предложение 1. *Пусть B — граница конуса H.*
Тогда $\mu(\bar{B})=1$ для любой меры $\mu\in\mathfrak{M}(H)$ (здесь $\bar{B}$ — замыкание B).

Всюду ниже рассматриваются без особых оговорок только замкнутые конусы H, содержащие константы.

Совокупность всех бэровских (борелевских) множеств B, обладающих тем свойством, что для каждой меры $\mu\in\mathfrak{M}(H)$ выполняется $\mu(B)=1$, обозначим через $\mathscr{B}_0(H)$ (соответственно $\mathscr{B}(H)$). Ниже приводится описание множеств $\mathscr{B}_0(H)$ и $\mathscr{B}(H)$.

Бэровское множество $B\subset Q$ назовем обобщенной границей конуса H, если для любой функции h, представимой в виде $\tilde{h}=\lim\limits_n h_n$ (где $h_n\in H$, $h_n\leqslant 1$, $n=1, 2, \ldots$), выполняется

$$\sup_{t\in B}\tilde{h}(t)=\sup_{t\in Q}\tilde{h}(t).$$

Теорема 1. *Пусть подпространство $H-H$ плотно в $C(Q)$.*
Тогда множество $\mathscr{B}_0(H)$ совпадает с совокупностью бэровских обобщенных границ.

Замечание. Если конус H является верхней решеткой и разделяет точки из Q, то, как следует из теоремы Бишопа — де Лю [2], $\mathscr{B}_0(H)$ совпадает с совокупностью всех бэровских множеств, содержащих границу Шоке. Таким образом, в этом случае бэровское множество является обобщенной границей тогда и только тогда, когда оно содержит границу Шоке.

Для описания множества $\mathscr{B}(H)$ нам понадобятся следующие определения. Пусть $\varkappa$ — направление, состоящее из открытых подмножеств Q

Сеть $\gamma=(h_G)_{G\in\varkappa}$ элементов конуса H назовем асимптотически неположительной на непустом борелевском множестве B, если: 1) найдется замкнутое F такое, что $F\cap B=\emptyset$ и $\varkappa$ состоит из всех открытых множеств, содержащих F; 2) $h_G(\tau)\leqslant 0$; $\tau\in Q\setminus G$; 3) $h_G(\tau)\leqslant 1$, $\tau\in Q$. Борелевское множество B назовем асимптотической границей конуса H, если для любой асимптотически неположительной на B сети γ выполняется

$$\inf_{h\in \mathrm{co}\,\gamma}\max_{t\in Q} h(t)\leqslant 0; \tag{1}$$

Здесь $\mathrm{CO}\,\gamma$ — выпуклая оболочка множества $\{h_G\}_G\in\varkappa$.

Условие (1) эквивалентно следующему: для любой $\mu\geqslant 0$ выполняется $\inf_\gamma \mu(h_\gamma)\leqslant 0$. Легко проверить, что асимптотическая граница является границей.

Если конус H — верхняя решетка и $H-H$ плотно в $C(Q)$, то справедливо следующее

Утверждение. *Боролевское множество B является асимптотической границей в том и только в том случае, когда для любой асимптотически неположительной на B сети γ, состоящей из неотрицательных функций, выполняется соотношение $0\in \overline{\mathrm{co}\,\gamma}$, где $\overline{\mathrm{co}\,\gamma}$ — замыкание $\mathrm{co}\,\gamma$.*

Теорема 2. *Пусть $H-H$ плотно в $C(Q)$. Тогда множество $\mathscr{B}(H)$ совпадает с совокупностью всех асимптотических границ конуса H.*

Доказательство теорем 1 и 2 существенно опирается на следующее утверждение.

Теорема 3. *Для того чтобы вероятностная мера μ входила в $\mathfrak{M}(H)$, необходимо и достаточно, чтобы для любого компакта $F\subset Q$ такого, что $\mu(F)>0$, для любого открытого $G\supset F$ и любого числа $\varepsilon>0$ нашлась функция $h\in F$ такая, что*

$$h(\tau)\leqslant 0,\ \tau\in Q\setminus G;\quad h(\tau)\leqslant 1,\ \tau\in Q;$$

$$\int_Q h\,d\mu\geqslant\mu(F)-\varepsilon.$$

Теорему 3 можно рассматривать как обобщение критерия границы Шоке в терминах «почти пиковых» функций ([1]).

3. Фильтр $\mathscr{B}$ в булевой алгебре борелевских подмножеств компакта Q назовем фильтром Шоке конуса H, если следующие условия эквивалентны:

а) $\mu\in\mathfrak{M}(H)$;

б) $\mu(B)=1$ для любого $B\in\mathscr{B}$.

Это определение оправдывается следующим предложением.

Предложение 2. *Если $\mathscr{B}$ — фильтр Шоке конуса H, то*

$$\bigcap_{B\in\mathscr{B}} B=\mathrm{Ch}(H).$$

Существование фильтра Шоке означает, что H-максимальность меры характеризуется лишь множествами, на которых эта мера сосредоточена.

Если конус H является верхней решеткой и $H-H$ плотно в $C(Q)$, то, как легко следует из теоремы Макободского ([1]), фильтр Шоке существует. При этом в силу теоремы 2 наибольший фильтр Шоке совпадает с совокупностью всех асимптотических границ конуса H.

Теорема 4. *Пусть конус H является верхней решеткой и $H-H$ плотно в $C(Q)$, пусть, далее, граница Шоке $\mathrm{Ch}\,(H)$ является борелевским множеством.*

Следующие утверждения эквивалентны:

а) $\mu(\mathrm{Ch}\,(H))=1$ *для любой* $\mu\in\mathfrak{M}(H)$;

б) *существует наименьшая асимптотическая граница конуса H.*

З а м е ч а н и е. Если какое-либо из эквивалентных условий теоремы выполнено, то наименьшая асимптотическая граница совпадает с $\mathrm{Ch}(H)$.

4. Укажем на связь носителей H-максимальных мер с $\mathrm{Ch}(H)$.

Т е о р е м а 5. *Точка τ из носителя H-максимальной меры входит в границу Шоке в том и только в том случае, когда для любого $x \in C(Q)$ функция* $\mathrm{co}_H x$: $t \mapsto \sup\limits_{h \in H,\, h \leq x} h(t)$ *непрерывна в этой точке.*

Автор благодарен С. С. Кутателадзе за обсуждение.

Калининский государственный
университет

Поступило
20 IX 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *С. С. Кутателадзе, А. М. Рубинов*, УМН, т. 27, 3, 128 (1972). [2] *E. M. Alfsen*, Compact Convex Sets and Boundary Integrals, Berlin — Heidelberg — N. Y., 1971.