Доклады Академии наук СССР
1974. Том 216, № 5

УДК 517.11 *МАТЕМАТИКА*

А. В. АЛТАЕВ

ОПЕРАТОРЫ, ОПРЕДЕЛЯЕМЫЕ γ-НУМЕРАЦИЕЙ, И СВЯЗАННЫЕ С НИМИ СВОДИМОСТИ

(Представлено академиком П. С. Новиковым 21 XII 1973)

В работе изучаются операторы Φ: $2^N\to 2^N$ (2^N — совокупность всех подмножеств натурального ряда N), определяемые стандартной γ-нумерацией конечных множеств [2]. Сформулируем

Определения. $U(\{n\})=D_n=\gamma n$, D_n в обозначениях [1], γn в обозначениях [2].

I. $U(A)=\bigcup\limits_{a\in A} U(\{a\})$.

II. $P(A)=\{a\,|\,U(\{a\})\subseteq A\}$.

III. $Q(A)=\{a\,|\,U(\{a\})\cap A\neq\emptyset\}$, $\quad Q(\emptyset)=\emptyset$.

IV. ${}^nP(A)=\{a\,|\,a\in P(A)\,\&\,|U(\{a\})|\leqslant n\}$, $\quad n\geqslant 1$.

V. ${}^nQ(A)=\{a\,|\,a\in Q(A)\,\&\,|U(\{a\})|\leqslant n\}$, $\quad n\geqslant 1$.

Операторы $P(A)$ и ${}^nP(A)$ были определены Джокушем в [11]; им же получены наиболее существенные теоремы, связанные с этими операторами (A^ω и A^n в обозначениях [11]). Ю. Л. Ершовым $P(A)$ и $Q(A)$ (${}^\omega A$) применялись в связи с позитивными эквивалентностями [4]. Некоторые свойства P, Q доказаны в диссертации А. Н. Дегтева (1973 г.).

В настоящей работе I—V систематически рассматриваются как отображения из 2^N в 2^N. Поэтому употребляемые обозначения соответствуют общепринятым (например, в [1]) для таких операторов.

Оказалось, что с помощью I—V можно легко получить новые факты, связанные с наследственными, полурекурсивными, q-продуктивными q-креативными множествами, изучавшимися в [6, 3, 5, 10]. Главные приложения (II—V) касаются сводимостей более строгих, чем tt-сводимость (включительно).

1. Приведем некоторые простые свойства I—V, часто используемые в доказательствах остальных результатов.

Обозначение 1. H_1 — совокупность операторов P, ${}^nP$; H_2 — совокупность Q, ${}^nQ$; $H=H_1\cup H_2$.

Предложение 1. а) *Если* $\Phi\in H\cup\{U\}$, *то* Φ — *оператор перечисления*;

б) *если* $\Phi\in H$, $A\leqslant_m B$, *то* $\Phi(A)\leqslant_m\Phi(B)$;

в) *если* $\Phi\in H$, *то* $\Phi(A)\equiv_e A$.

Предложение 2. а) *Если* $\Phi\in H_2$, *то* $\Phi(A\cup B)=\Phi(A)\cup\Phi(B)$;

б) *если* $\Phi\in H_1$, *то* $\Phi(A\cap B)=\Phi(A)\cap\Phi(B)$;

в) $\overline{Q(A)}=P(\bar A)$;

г) $\overline{{}^nQ(A)}\equiv_m {}^nP(\bar A)$.

Предложение 3. а) ${}^nQ(A)\leqslant_m {}^{n+1}Q(A)\leqslant_m Q(A)$;

б) ${}^nP(A)\leqslant_m {}^{n+1}P(A)\leqslant_m P(A)$;

в) *если* ${}^{n+1}Q(A)\leqslant_m {}^nQ(A)$, *то* $Q(A)\leqslant_m {}^nQ(A)$;

г) *если* ${}^{n+1}P(A)\leqslant_m {}^nP(A)$, *то* $P(A)\leqslant_m {}^nP(A)$;

д) $Q(Q(A))\equiv_m Q(A)$;

е) $P(P(A))\equiv_m P(A)$.

Предложение 4. а) $P(Q(A))\equiv_m Q(P(A))$;

б) ${}^{n_1}P({}^{n_2}P(A))\equiv_m {}^{n_1n_2}P(A)$;

в) ${}^{n_1}Q({}^{n_2}Q(A))\equiv_m {}^{n_1 n_2}Q(A)$;

г) $(\forall n)(\exists c)({}^{n}Q({}^{n}P(A))\leqslant_m {}^{c}P({}^{n}Q(A)))$;

д) $(\forall n)(\exists c)({}^{n}P({}^{n}Q(A))\leqslant_m {}^{c}Q({}^{n}P(A)))$.

Предложение 5. а) ${}^{n}P(A)\equiv_m \underbrace{A\times\ldots\times A}_{n}$;

б) ${}^{n}Q(A)\equiv_m \overline{\underbrace{\bar{A}\times\ldots\times\bar{A}}_{n}}$;

в) $P(A\times B)\equiv_m P(A)\times P(B)$;

г) $P(A\oplus B)\equiv_m P(A\times B)$.

Справедливость предложений 1–5 вытекает непосредственно из определений.

2. Рассмотрим теперь действие операторов из H на некоторых классах множеств.

Предложение 6. *Если $\Phi\in H$, то A полурекурсивное $\Leftrightarrow \Phi(A)$ полурекурсивное.*

Доказывается с помощью теорем 4.1, 4.2 из работы ([10]).

Предложение 7. *Если $\Phi\in H_2$, то A простое, но не гиперпростое $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \Phi(A)$ простое, но не гиперпростое.*

Достаточность следует из леммы 8 работы ([4]), необходимость — из предложения 4 и определения гиперпростого множества.

Предложение 8. *Если A бесконечное, то $P(A)$ содержит бесконечное подмножество, ретрассируемое общерекурсивной функцией.*

Доказательство. Если $\psi(n)$ — прямой пересчет A, то $D=\{d_i\,|\,d_i=$ $=\sum\limits_{j=0}^{i}2^{\psi(j)}\}$ — искомое множество.

Следствие. *Если A строго гиперпростое, то $Q(A)$ не является строго гиперпростым.*

Вытекает из ([1]), стр. 325.

Предложение 9. *A q-продуктивное $\Leftrightarrow$ существует $\Phi\in H_1$ такой, что $\Phi(A)$ продуктивное.*

Доказательство использует предложение 1 и определение оператора U.

Следствие. *A q-креативное $\Leftrightarrow$ существует $\Phi\in H_2$ такой, что $\Phi(A)$ креативное.*

3. Обозначение 2. а) c, q, p, bc, bp, bq-сводимости — γ_e-сводимости;

б) bc, bp, bq, btt-сводимости — γ_b-сводимости;

в) c, p, q, tt-сводимости — γ-сводимости.

γ_b-сводимости определены в ([8]), γ-сводимости — в ([1]).

Предложение 10. а) $A\leqslant_c B\Leftrightarrow A\leqslant_m P(B)$;

б) $A\leqslant_{bc}B\Leftrightarrow(\exists n)(A\leqslant_m {}^{n}P(B))$;

в) $A\leqslant_q B\Leftrightarrow A\leqslant_m Q(B)$;

г) $A\leqslant_{bq}B\Leftrightarrow(\exists n)(A\leqslant_m {}^{n}Q(B))$;

д) $A\leqslant_p B\Leftrightarrow A\leqslant_m Q(P(B))$;

е) $A\leqslant_{bp}B\Leftrightarrow(\exists n)(A\leqslant_m {}^{n}Q({}^{n}P(B))$;

ж) $A\leqslant_{tt}B\Leftrightarrow A\leqslant_m Q(P(B\times\bar{B}))$;

з) $A\leqslant_{btt}B\Leftrightarrow(\exists n)(A\leqslant_m {}^{n}Q({}^{n}P(B\times\bar{B}))$.

Следствие 1. *Если R — γ-сводимость, то R-степень любого множества C содержит множество A такое, что $(\forall B)(B\leqslant_R A\Rightarrow B\leqslant_m A)$.*

Следствие 2. *Если R — γ_e-сводимость, то*

$$(\forall A)(\forall B)(A\leqslant_R B\Rightarrow A\leqslant_e B).$$

В ([8]) сформулировано определение q_n-креативного множества. Из следствия предложения 9 вытекает, что A q-креативное $\Leftrightarrow Q(A)$ креативное и A q_n-креативное $\Leftrightarrow {}^{n}Q(A)$ креативное.

Предложение 11. а) *Если A q_n-креативное, то A q_{n+1}-креативное, A q-креативное.*

б) *Для любого $n\geqslant 2$ существует q_n-креативное, но не q_{n-1}-креативные множества.*

в) *Существуют q-креативные, но не q_n-креативные множества.*

Доказательство. а) Следует из определений. б) Из теоремы 9.8 работы ([8]) следует существование q_n-креативных, но не q_{n-1}-креативных множеств для $n\geqslant 3$, из теоремы 1 работы ([9]) — для $n=2$. в) Шенфилд в ([6]) построил q-креативные множества, не являющиеся btt-полными, а значит, и q_n-креативными.

Теорема 1. *A bp-полное $\Leftrightarrow$ A q_n-креативное.*

Доказательство. а) $\Leftarrow$ Очевидно. б) $\Rightarrow$ Пусть A bp-полное, т. е. существует n такое, что ${}^nQ({}^nP(A))$ креативное. Если A креативное, то A q_1-креативное. Пусть A не креативное. По предложению 4 существует c такое, что ${}^nQ({}^nP(A)\leqslant_m {}^cP({}^nQ(A))$, т. е. ${}^cP({}^nQ(A))$ креативное. По теореме Лахлана ([7]) ${}^nQ(A)$ креативное. Значит, A q_n-креативное.

Предложение 12. *Если A q-креативное и псевдопростое, то bq-степень A содержит бесконечную цепь m-степеней q-креативных, но не q_n-креативных множеств.*

Искомая цепь состоит из m-степеней множеств ${}^nQ(A)$. Доказательство следует из результатов ([6]).

4. Напомним, что $M(A)=\{B|B\leqslant_m A\}\mathfrak{B}_m(A)$ — булева алгебра, порожденная $M(A)$ ([1]).

Определение 1. а) $S_н(A)$ — нижняя полурешетка, порожденная $M(A)$ (по $\cap$).

б) $S_в(A)$ — верхняя полурешетка, порожденная $M(A)$ (по $\cup$).

в) $S(A)$ — решетка, порожденная $M(A)$ (по $\cup$, $\cap$).

Теорема 2. *Если A не совпадает ни с N, ни с ϕ, то для любого C:*

а) $C\leqslant_{bc}A\Leftrightarrow C\in S_н(A)$;

б) $C\leqslant_{bq}A\Leftrightarrow C\in S_в(A)$;

в) $C\leqslant_{bp}A\Leftrightarrow C\in S(A)$.

Доказательство почти целиком совпадает с доказательством Роджерса для btt-сводимости ([1]).

Предложение 13. *A наследственное $\Leftrightarrow$ $P(A)\leqslant_m A$.*

Следует из предложений 3, 5.

Ниже наследственные множества обозначим как н-множества.

Определение 2. а) A q-множество, если $Q(A)\leqslant_m A$;

б) A qн-множество, если $Q(P(A))\leqslant_m A$;

в) A tt-множество, если $P(Q(A\times\bar{A}))\leqslant_m A$.

Заметим, что именно о н, q, qн и tt-множествах говорится в следствии 1 предложения 10.

Теорема 3. *Если $A\neq N$ и $A\neq\phi$, то:*

а) A *н-множество* $\Leftrightarrow$ $M(A)=S_н(A)$;

б) A *q-множество* $\Leftrightarrow$ $M(A)=S_в(A)$;

в) A *qн-множество* $\Leftrightarrow$ $M(A)=S(A)$;

г) A *tt-множество* $\Leftrightarrow$ $M(A)=\mathfrak{B}_m(A)$.

Необходимость устанавливается непосредственно, достаточность следует из теоремы 2.

Выражаю признательность В. А. Душскому за внимание к работе.

Всесоюзный научно-исследовательский
институт экономики торговли и систем управления
Москва

Поступило
28 XI 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *X. Роджерс,* Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость, М., 1972. [2] *А. И. Мальцев,* Алгоритмы и рекурсивные функции, М., 1965. [3] *А. Н. Дегтев,* Алгебра и логика, т. 11, 3 (1972). [4] *Ю. Л. Ершов,* Алгебра и логика, т. 10, 6 (1971). [5] *И. А. Лавров,* Алгебра и логика, т. 7, 2 (1968). [6] *J. Shoenfield,* Proc. Am. Math. Soc., v. 8, 5, 964 (1957). [7] *A. Lachlan,* J. Symb. Logic, v. 31, 3, 573 (1966). [8] *A. Lachlan,* Zs. Mat. Log. u. Gr. Mat., B. 11, 1, 178 (1965). [9] *P. Young,* Trans. Am. Math. Soc., v. 115, 3, 329 (1965). [10] *C. Jakusch,* Trans. Am. Math. Soc., v. 131, 2, 420 (1968). [11] *C. Jockusch,* Trans. Am. Math. Soc., v. 142, 8, 229 (1969).