Доклады Академии наук СССР
1974. Том 215, № 5

УДК 513.83 *МАТЕМАТИКА*

В. В. ФИЛИППОВ

О ЛОКАЛЬНО-СВЯЗНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

(*Представлено академиком П. С. Александровым 19 X 1973*)

Целью настоящей заметки является построение локально-связного сепарабельного метрического пространства X, обладающего открытым покрытием, в которое нельзя вписать открытое локально-конечное покрытие, состоящее из связных множеств.

1. Пусть X_r, где $0<r\leqslant 1$, есть множество всех непрерывных на полуинтервале $[0, r)$ функций, удовлетворяющих условию: для каждой функции $f\in X_r$ найдется последовательность $\{f_k: k=0, 1, 2, \ldots\}$ рациональных точек отрезка $[0, 1]$, сходящаяся, монотонно возрастая, к точке r, причем $t_0=0$, $f(t_k)$, $k=0, 1, 2, \ldots$, есть рациональное число и на каждом из отрезков $[t_k, t_{k+1}]$, $k=0, 1, 2, \ldots$, функция f линейна.

Отметим, что если $r_1<r_2$ и $f\in X_{r_2}$, то $f|_{[0, r_1]}\in X_{r_1}$.

2. Пусть $X=\cup\{X_r: 0<r\leqslant 1\}$. Введем на множестве X метрику ρ следующим образом: если $f_1\in X_{r_1}$, $f_2\in X_{r_2}$ и

$$r=\inf\{x: x<\min\{r_1, r_2\},\ f_1(x)\neq f_2(x);\ r_1;\ r_2\},$$

то

$$\rho(f_1, f_2)=r_1+r_2-2r.$$

Построенное метрическое пространство X, как легко видеть, локально-линейно-связно.

3. Рассмотрим покрытие ω пространства X, состоящее из двух множеств $W_0=X\setminus X_1$ и $W_1=\cup\{X_r: {}^1/_2<r\leqslant 1\}$. Покажем, что в покрытие ω нельзя вписать открытое локально-конечное покрытие, состоящее из связных множеств.

Допустим противное, т. е. что такое покрытие γ существует. Пусть $\gamma_1=\{U: U\in\gamma,\ U\subseteq W_1\}$, $\gamma_0=\gamma\setminus\gamma_1$.

Построим последовательность $\{\varphi_n: n=1, 2, \ldots\}$ элементов множества X_1, монотонно возрастающую последовательность $\{t_n: n=1, 2, \ldots\}$ рациональных точек отрезка $[0, 1]$, последовательность $\{U_n: n=1, 2, \ldots\}$ различных элементов семейства γ_1, такие, что

а) если $i>j$ $\varphi_i|_{[0, tj)}=\varphi_j|_{[0, tj)}$ и $\varphi_n(r)\neq\varphi_{n+1}(r)$ при $r>t_n$,

б) $\rho(\varphi_n|_{[0, t_n)}, U_n)<1/2^n$,

в) для любого $r\leqslant t_n$ $\varphi_n|_{[0, r)}\notin\cup\gamma_1$ *и* $\varphi_n|_{[0, t_n)}\notin[\cup\gamma_1]$,

г) $\{\varphi_n|_{[0, r)}: t_n<r\leqslant 1\}\cap[U_n]\neq\varnothing$,

д) $\{\varphi_{n+1}|_{[0, r)}: t_n<r\leqslant 1\}\cap[U_n]=\varnothing$.

Проведем построение этих последовательностей по индукции. В качестве φ_1 возьмем любой элемент множества X_1. Пусть мы уже выбрали $\varphi_1, \ldots, \varphi_N$, $t_1, \ldots, t_{N-1}$, $U_1, \ldots, U_{N-1}$. Построим t_N, U_N и φ_{N+1}.

Отображение Φ, ставящее в соответствие точке r полуинтервала $(0, 1]$ элемент $\varphi_N|_{[0, r)}$ пространства X, есть, как легко видеть, изометрическое вложение полуинтервала $(0, 1]$ в пространство X. По определению множества W_0 $\Phi(1)\notin W_0$ и потому $\Phi(1)=\varphi_N\in\cup\gamma_1$. Пусть $t_N^*=\inf\{r: r\in(0, 1],\ \Phi(r)\in\cup\gamma_1\}$. В силу определения множества W_1 и включения $\cup\gamma_1\subseteq W_1$, $t_N^*\geqslant{}^1/_2$. В силу в) и г) $t_N^*>t_{N-1}$ при $N\geqslant 2$.

В силу того, что по нашему предположению семейство $\gamma_1 \subseteq \gamma$ локально-конечно и состоит из связных множеств, по определению t_N^* множество

$$M=\{t:\ t\in[0,\ t_N^*),\ \Phi(t)\in[\cup\gamma_1]\}$$

конечно.

Пусть t_N — любая рациональная точка отрезка $[0,\ 1]$, удовлетворяющая условиям:

$$\max\{M\cup\{t_{N-1}\}\}<t_N<t_N^*, \tag{*}$$

$$|t_N-t_N^*|<1/2^N. \tag{**}$$

В силу локальной конечности семейства γ_1 и включения $\Phi(t_N^*)\in[\cup\gamma_1]$ для некоторого множества $U_N\in\gamma_1$

$$\Phi(t_N^*)=\varphi_N|_{[0,\ t_N^*)}\in[U_N]\setminus U_N.$$

В качестве $\varphi_{N+1}\in X_1$ возьмем любую определенную на полуинтервале $[0,\ 1)$ функцию (из X_1), совпадающую на $[0,\ t_N]$ с функцией φ_N и отличную от нее всюду на $(t_N,\ 1)$.

При нашем выборе t_N, U_N и φ_{N+1} условие а) выполнено для всех $i\leqslant N+1$ потому, что $\varphi_N(r)=\varphi_{N+1}(r)$ при $r\leqslant t_N$ и $\varphi_N(r)\neq\varphi_{N+1}(r)$ в противном случае. Условие б) для $n=N$ выполнено в силу (**) и выбора множества U_N: $\rho(\varphi_N|_{[0,\ t_N)},\ \Phi(t_N^*))\leqslant 1/2^N$, $\Phi(t_N^*)\in[U_N]$. Условие в) для $n=N$ выполнено по выбору t_N: $t_N<t_N^*$ и $t_N\notin M$. Условие г) для $n=N$ выполнено по выбору U_N: $\varphi_N|_{[0,\ t_N^*)}\in[U_N]$. Наконец, д) выполнено по выбору φ_{N+1} в силу того, что множество $V_N=\{f:\ f\in\cup\{X_r:\ t_N<r\leqslant 1\},\ f|_{[0,\ t_N+\varepsilon)}=\varphi_N|_{[0,\ t_N+\varepsilon)}$ для некоторого $\varepsilon>0\}$ открыто в пространстве X, содержит внутри себя множество $[U_N]$ (ввиду связности множества $[U_N]$) и не пересекается с множеством $\{\varphi_{N+1}|_{[0,\ r)}:\ t_N<r\leqslant 1\}$.

Заметим, теперь, что элементы последовательности $\{U_n:\ n=1,\ 2,\ldots\}$ попарно различны, ибо, как мы видели при проверке выполнения д), $U_n\subseteq V_n$, $n=1,\ 2,\ldots$, и в силу второй части условия а) множества V_n, $n=1,\ 2,\ldots$, попарно не пересекаются.

Пусть теперь $t=\sup\{t_n:\ n=1,\ 2,\ldots\}$. Зададим элемент $\varphi\in X_t$ условием $\varphi|_{[0,\ t_n)}=\varphi_n|_{[0,\ t_n)}$, $n=1,2,\ldots$ В силу а) функция φ задана корректно. Как легко видеть, $\varphi=\lim\limits_{n\to\infty}(\varphi_n|_{[0,\ t_n)})$, где предел берется в смысле метрики ρ, а так как $\lim\limits_{n\to\infty}\rho(\varphi_n|_{[0,\ t_n)},\ [U_n])=0$ и элементы последовательности $\{U_n:\ n=1,\ 2,\ldots\}$ попарно различны, то любая окрестность точки $\varphi\in X$ пересекается с бесконечным числом элементов семейства $\gamma_1\subseteq\gamma$, что противоречит локальной конечности семейства γ.

Полученное противоречие дает требуемое.

4. Покажем, что пространство X сепарабельно. Пусть $Y_1=\{\varphi:\ \varphi\in X_1$, найдется конечное число $r_0,\ldots,r_k$ рациональных точек отрезка $[0,\ 1]$, $r_0=0$, $r_k=1$, $r_0<\ldots<r_k$, таких, что функция φ линейна на отрезках $[r_{i-1},\ r_i]$, $i=1,\ldots,k\}$.

Как легко видеть, множество Y_1 счетно, как счетно и множество $Y=\{\varphi|_{[0,\ r)}:\ \varphi\in Y_1,\ r$ — рациональная точка отрезка $[0,\ 1]\}$. Очевидно, $[Y]=X$.

З а м е ч а н и е. Пространство X с описанной метрикой не является полным, однако пополнение состоит в добавлении одной точки и сохраняет все требуемые свойства пространства X.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
3 X 1973