Доклады Академии наук СССР
1974. Том 215, № 5

УДК 539.374 *МЕХАНИКА СПЛОШНОЙ СРЕДЫ*

В. М. ФОМИН, В. П. ШАПЕЕВ, академик Н. Н. ЯНЕНКО

D-СВОЙСТВА СИСТЕМ ОДНОМЕРНЫХ УРАВНЕНИЙ ДИНАМИКИ НЕУПРУГОЙ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ

В последнее время в ряде работ ([1-4]) предложено довольно-таки общее уравнение состояния динамических процессов в сплошной среде. Их авторы пытаются определить вид уравнения состояния с точностью до констант, исходя из физических и математических предпосылок, а константы определить подбором при сравнении численных расчетов с экспериментом. В предлагаемой работе изучаются некоторые математические свойства системы уравнений одномерной неупругой сплошной среды, при этом получаются ограничения на вид уравнения состояния. Аналогично могут быть исследованы другие модели механики сплошной среды.

1. Введем ряд определений.

Определение 1. Система дифференциальных уравнений обладает D-свойством, если система $S\cup D$, полученная объединением системы S и системы дифференциальных связей D ([5]), совместна и находится в инволюции.

Вид дифференциальных связей можно априори не фиксировать, а находить из требования, чтобы решение системы обладало заданным произволом. Это требование в ходе анализа на совместимость системы $S\cup D$ дает условия на функции, определяющие вид дифференциальных связей. Обозначим символом $D_{j_1, j_2, \ldots, j_m}^{i_1, i_2, \ldots, i_m}\Pi_{l_1, \ldots, l_p}^{k_1, \ldots, k_p}$ совокупность условий существования у данной системы S решения, зависящего от k_β произвольных функций от l_β аргументов, $\beta=1, \ldots, p$, и характеризуемого ([5]) совокупностью i_α дифференциальных связей D порядка j_α, $\alpha=1, 2, \ldots, m$. Кратко назовем их $D\Pi$-условиями. В общем случае они являются системой уравнений в частных производных относительно функций, определяющих вид дифференциальных связей D.

Определение 2. Система $S\cup D$, удовлетворяющая $D\Pi$-условиям, называется $D\Pi$-системой.

Определение 3. Решения системы уравнений S, являющиеся решениями $D\Pi$-системы, называются $D\Pi$-решениями.

Применим понятие D-свойства к системе уравнений динамики одномерной сплошной среды в безразмерных переменных

$$v_t=\sigma_x, \quad \varepsilon_t=v_x \tag{1}$$

с уравнением состояния

$$\sigma_t=A(\sigma, \varepsilon)\varepsilon_t+B(\sigma, \varepsilon)\varepsilon_x+H(\sigma, \varepsilon)\sigma_x+C(\sigma, \varepsilon), \tag{2}$$

где σ — напряжение, v — скорость перемещения материальной точки, ε — деформация, t — время, x — лагранжева координата, а коэффициенты $A(\sigma, \varepsilon)$, $B(\sigma, \varepsilon)$, $C(\sigma, \varepsilon)$ и $H(\sigma, \varepsilon)$ — пока произвольные функции своих аргументов.

Предварительно потребуем, чтобы система (1), (2) имела три вещественные характеристики, модули тангенсов углов наклона двух характеристик разных семейств в точке пересечения были равны и третье семейство характеристик совпадало с траекториями частиц среды. Отсюда следует, что уравнение (2) должно иметь вид

$$\sigma_t=a(\sigma, \varepsilon)\varepsilon_t+c(\sigma, \varepsilon). \tag{3}$$

К системе (1), (3) присоединим самую общую квазилинейную дифференциальную связь первого порядка

$$\tilde{A}(\sigma, \varepsilon)\sigma_x+\tilde{E}(\sigma, \varepsilon)\varepsilon_t+\tilde{F}(\sigma, \varepsilon)\varepsilon_x+\tilde{G}(\sigma, \varepsilon)=0 \tag{4}$$

и выпишем $D_1{}^1\Pi_1{}^2$-условия для системы (1), (3), (4). В результате анализа на совместность устанавливаем, что в общем случае вместо (4) достаточно рассматривать связь

$$\sigma_x=E(\sigma, \varepsilon)\varepsilon_t+F(\sigma, \varepsilon)\varepsilon_x+G(\sigma, \varepsilon); \tag{5}$$

при этом имеют место два случая $D_1{}^1\Pi_1{}^2$-систем с решениями

$$\text{а)}\ F=0,\quad a=E^2,\quad c=\pm c_3(l^3+c_4c_3{}^2l^4+c_1c_3{}^2l^4\varepsilon)^{1/2},$$
$$E=c_3l,\quad G=\pm l^{1/2}+c/c_3\cdot l,\quad l=c_1\sigma+c_2; \tag{6а}$$

$$\text{б)}\ E=0,\quad a=E,\quad G=c_1c(\sigma,\varepsilon),\quad F=c\left(\int\frac{c_\varepsilon}{c^2}d\sigma+f(\varepsilon)\right). \tag{6б}$$

Здесь c_1, c_2, c_3, c_4 — произвольные константы, $f(\varepsilon)$, $c(\sigma, \varepsilon)$ — произвольные функции соответственного одного и двух аргументов.

Теорема 1. *Для того чтобы система уравнений* (1), (3) *имела $D_1{}^1\Pi_1{}^2$-решения, характеризуемые дифференциальной связью* (5), *необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты уравнения состояния определялись либо соотношениями* (6а) *с произволом в четыре константы, либо соотношениями* (6б) *с произволом в одну функцию одного аргумента и одну функцию двух аргументов.*

К переопределенной системе (1), (3), (5) присоединим вторую самую общую квазилинейную дифференциальную связь первого порядка и выпишем $D_1{}^2\Pi_1{}^1$-условия для полученной системы. Анализ на совместность показывает, что в качестве второй дифференциальной связи в общем случае достаточно взять связь

$$\varepsilon_t=r(\sigma, \varepsilon)\varepsilon_x+s(\sigma, \varepsilon), \tag{7}$$

при этом $D_1{}^2\Pi_1{}^1$-условия можно привести к системе Коши — Ковалевской первого порядка относительно четырех функций

$$\begin{gathered}
s_\varepsilon=(hh_\sigma-\bar{c}s_\sigma-rhs_\sigma)/s,\quad h_\varepsilon=(h\bar{c}_\sigma-\bar{c}h_\sigma+r^2hs_\sigma)/s,\\
r_\varepsilon=(r^2h_\sigma+hrr_\sigma-2r^3s_\sigma)/s+(h\bar{c}_\sigma-\bar{c}h_\sigma-2rhh_\sigma+2r\bar{c}s_\sigma+r^2hs_\sigma)/s^2,\\
\bar{c}_\varepsilon=-r^2\bar{c}_\sigma+3r^3h_\sigma-3r^4s_\sigma+3(rh\bar{c}_\sigma-\bar{c}rh_\sigma-r^2hh_\sigma+cr^2s_\sigma)/s,\\
h=sD+G,\quad a=r^2,\quad c=\bar{c}-as,\quad F=r^2-Dr.
\end{gathered} \tag{8}$$

Теорема 2. *Для того чтобы система уравнений* (1), (3) *имела $D_1{}^2\Pi_1{}^1$-решения, характеризуемые дифференциальными связями* (5) *и* (7), *необходимо и достаточно выполнения условий* (8), *при этом произвол в определении коэффициентов уравнения состояния равен четырем функциям одного аргумента.*

В результате рассмотрения всех возможных случаев $D\Pi$-решений системы (1), (3) с функциональным произволом получены следующие результаты:

Решения	$D_1^1\Pi_1^2$	$D_1^1\Pi_1^1$	$D_1^2\Pi_1^2$	$D_1^2\Pi_1^1$	$D_1^3\Pi_1^3$
Условия	(6)	Не в инволюции	Несовместны	(8)	Несовместны

Здесь можно также выписать такие $D\Pi$-условия, которые одновременно являются как $D_1{}^1\Pi_1{}^2$-условиями, так и $D_1{}^2\Pi_1{}^1$-условиями. При этом в более содержательном случае $D_1{}^1\Pi_1{}^2$ б) $\cap D_1{}^2\Pi_1{}^1$-условий их можно свести к системе трех уравнений типа Коши — Ковалевской.

Если уравнение (3) и связь (5) линейны, то для существования $D_1{}^1\Pi_1{}^2$-решений уравнение (3) должно быть вида

$$\sigma_t=a\varepsilon_t+k_1\sigma-ak_1\varepsilon+k_2,$$

k_1, k_2, a — произвольные константы. Имеют место три различных подслучая:

1) $a\neq 0$, $k_2\neq 0$; 2) $a=0$, $k_1\neq 0$; 3) $k_1=0$, $a\neq 0$, каждый со своей дифференциальной связью. Для них легко выписать $D_1{}^1\Pi_1{}^2$-решения, а также общее решение системы (1), (3). В первом случае решение системы (1), (3) задается формулами

$$\sigma=\varphi+\psi+k_1{}^2\omega e^{-k_1t},$$
$$v=(\psi-\varphi)/a^{1/2}+k_1\omega_x{}'e^{k_1t},$$
$$\varepsilon=(\varphi+\psi)/a+\omega_{xx}{}''e^{k_1t}+k_2/(ak_1);$$

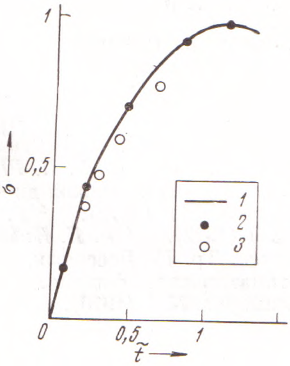

Рис. 1. *1* — экспериментальная зависимость $\tilde{\sigma}=\tilde{\sigma}(t, 0)$; *2*, *3* — расчет по нашей модели (2) и модели Соколовского – Мальверна (*3*)

во втором случае

$$\sigma=\omega e^{k_1t}-k_2/k_1,\quad v=\omega_x{}'e^{k_1t}/k_1+f(x),$$
$$\varepsilon=\omega_{xx}{}''e^{k_1t}/k_1{}^2+f_x{}'t+g(x);$$

в третьем случае

$$\sigma=\varphi+\psi,\quad v=(\psi-\varphi)/a^{1/2}-k_2x/a,$$
$$\varepsilon=(\psi+\varphi)/a-\omega/a-k_2t/a.$$

Здесь $\xi=t+x/a^{1/2}$, $\eta=t-x/a^{1/2}$, а функции f, g, $\varphi=\varphi(\eta)$, $\psi=\psi(\xi)$ и $\omega=\omega(x)$ произвольные.

2. Уравнение (3) и связь (5) представляют из себя замкнутую систему. Если известно ее решение, то v находится как решение вполне интегрируемой системы. Когда E, F, G не зависят от σ, то лучше сначала выделить из системы (1), (3), (5) уравнения

$$v_x=\varepsilon_t,\qquad v_t=E(\varepsilon)\varepsilon_t+F(\varepsilon)\varepsilon_x+G(\varepsilon) \tag{9}$$

и исследование вести относительно переменных v и ε. При этом в случае б) $D_1{}^1\Pi_1{}^2$-системы коэффициент a в уравнении (3) определяется как $a=F=\varphi'(\varepsilon)$, где $\sigma=\varphi(\varepsilon)$ — статическая зависимость (σ–ε), а неоднородный член — как функция аргумента ($\sigma-\int F\,d\varepsilon$). Если $G=0$, то систему (9) полезно линеаризовать преобразованием годографа. Дополнительно предположим, что (3) распространяется и на статику, т. е. из $\varepsilon_t=\sigma_t=0$ следует $c(0)=0$, и рассмотрим две связанные между собой задачи о динамическом деформировании стержня длины l и диаметра d, $l\gg d$, один конец которого жестко закреплен.

Задача 1. Найти функции v и $\varepsilon\in c^2$, удовлетворяющие системе (9) в области $t>0$, $x\in[0, l]$ начальным $\varepsilon(0, x)=\varepsilon_0$, $v(0, x)=v_0$, $x\in[0, l]$ и граничным условиям $v(t, 0)=0$, $v(t, l)=u_0$, $t>0$.

Задача 2. Найти функцию $c(\sigma-\varphi(\varepsilon))$, если известны $\sigma(t, 0)=F_1(t)$ и решение задачи 1.

Используя результаты работы [6], устанавливаем, что решение задачи 1 существует и единственно, если $F(\varepsilon)\in c^1$. Взяв известную после решения задачи 1 функцию $\chi(\sigma-\varphi)=\psi^{-1}$, обратную к функции $\psi(t)=F_1(t)-\varphi(\varepsilon(t, 0))$, решение задачи 2 определяем формулой $c=F_1{}'-\varphi'\cdot\varepsilon_t{}'(\chi, 0)$.

С целью получения простого аналитического решения в качестве конкретного примера было взято уравнение состояния

$$\sigma_t=\frac{1}{4(\alpha\varepsilon+\beta)^4}\varepsilon_t+c_2\left[c_1{}^2-\left(\sigma-\sigma_1+\frac{1}{12\alpha(\alpha\varepsilon+\beta)^3}\right)^2\right]^{1/2}$$

и проведено сравнение теоретических расчетов с экспериментальными данными, изложенными в работе [7]. Результаты приведены на рис. 1, где $\tilde{\sigma}=(\sigma-\sigma_0)/\sigma_*$, $\sigma_0=10$ кг/см^2, $\sigma_*=8$ кг/см^2, $\tilde{t}=(t-t_0)/t_0$, $t_0=3{,}4\cdot10^{-3}$ сек.

Константы $\sigma_1=0{,}69$; $\alpha=0{,}34$; $\beta=0{,}71$ выбирались из условия аппроксимации статической зависимости $(\sigma-\varepsilon)$, а константы $c_1=0{,}38$; $c_2=1{,}42$ из требования близости экспериментальной и теоретической кривых $\bar{\sigma}=\bar{\sigma}(t, 0)$. Величины σ_0, t_0, а также все другие необходимые исходные данные взяты из ([7]).

Вычислительный центр
Сибирского отделения Академии наук СССР
Новосибирск

Поступило
26 VI 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *В. М. Фомин, В. П. Шапеев, Н. Н. Яненко,* V Всесоюзн. совещание по аналитическим методам газовой динамики, Тез. докл., М., 1972. [2] *N. Cristescu,* Int. J. Structures, v. 8, 511 (1972). [3] *P. Brevet, P. H. Guiraldeng, P. F. Gobin,* Mec. mater. elec., № 269 (1972). [4] *Р. И. Нигматуллин, Н. Н. Холин,* ДАН, т. 209, № 1 (1973). [5] *Н. Н. Яненко,* Тр. IV Всесоюзн. математич. съезда, Л., 1961. [6] *С. Л. Соболев,* Уравнения математической физики, М., 1966. [7] *С. М. Кокошвили, П. П. Калнинь,* Механика полимеров, № 1 (1970).