Доклады Академии наук СССР
1974. Том 216, № 5

УДК 534.0 **ФИЗИКА**

И. Л. ВЕРБИЦКИЙ

ДВУХМЕРНАЯ ЗАДАЧА ДИФРАКЦИИ НА ПЕРИОДИЧЕСКИХ СТРУКТУРАХ

(Представлено академиком М. А. Леонтовичем 23 VIII 1973)

В настоящее время отсутствует общий метод численного решения дифракционных задач для произвольных периодических структур. В предлагаемой статье заполнен этот пробел: предложен метод, основанный на использовании функции Грина для уравнения Лапласа и автоматически учитывающий особенности поля в угловых точках (если таковые имеются). Метод эффективен для систем с периодом, не превосходящим нескольких длин волн в свободном пространстве, т. е. в длинноволновой и промежуточной областях. Для иллюстрации возьмем задачу о дифракции плоской волны на произвольной двухмерной периодической поверхности (см. рис. 1).

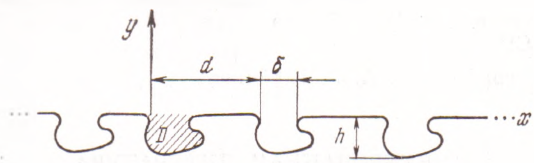

Рис. 1

Обозначим: ω — частота, λ — длина волны в свободном пространстве, $k=\omega/c$ — волновое число и d — период системы. Область D, ограниченную одним периодом системы снизу и отрезком $pd\leqslant x\leqslant\delta+pd$, $p=0, \pm1, \ldots$, оси Ox сверху, будем называть резонатором, границу резонатора обозначим ∂D. Всю область над периодической системой назовем Ω, а ее границу Γ.

Падающую волну зададим в виде

$$u^{(0)}=Ae^{i\beta x+\alpha y}, \qquad \beta=k\cos\varphi, \qquad \alpha=ik\sin\varphi.$$

Поле u определяется волновым уравнением

$$\Delta u+k^2u=0 \tag{1}$$

и граничными условиями, в качестве которых примем условия Неймана

$$\partial u/\partial n|_\Gamma=0, \tag{1'}$$

условие предельного поглощения и условие квазипериодичности (Флоке)

$$u(x+d,\ y)=e^{i\beta d}u(x,\ y). \tag{1''}$$

В соответствии с (1) и (1″) можно u представить при $y>0$ в виде

$$u=u^{(0)}+\sum_{n=-\infty}^{\infty}C_ne^{i\beta_nx-\alpha_ny}, \quad \beta_n=\beta+\frac{2n\pi}{\alpha}, \quad \alpha_n=(\beta_n{}^2-k^2)^{1/2}, \quad \alpha_0=\alpha, \tag{2}$$

причем $\operatorname{Im}\alpha_n<0$, а если $\operatorname{Im}\alpha_n=0$, то берем $\alpha_n>0$.

В области $D(p=0)$ представим u в виде разложения по полной системе ортонормированных собственных функций $u_m(x,\ y)$ задачи Неймана в D [1]

$$\left.\frac{\partial u_m}{\partial n}\right|_\Gamma=0, \quad \iint\limits_D u_m^2\,ds=1, \quad u=\sum_{m=0}^{\infty}A_m u_m(x,y). \tag{3}$$

Запишем уравнение (1) в форме

$$\Delta u=-k^2\begin{cases} u^{(0)}+\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}C_n e^{i\beta_n x-\alpha_n y} & \text{при } y\geqslant 0,\\ \sum\limits_{m=0}^{M}A_m u_m(x,y) & \text{при } y\leqslant 0,\ (x,y)\in D\end{cases} \tag{4}$$

и аппроксимируем бесконечные ряды в правой части (4) их конечными отрезками, положив

$$\Delta u\simeq-k^2\begin{cases} u^{(0)}+\sum\limits_{n=-N}^{N}C_n e^{i\beta_n x-\alpha_n y} & \text{при } y\geqslant 0,\\ \sum\limits_{m=0}^{M}A_m u_m(x,y) & \text{при } y<0,\ (x,y)\in D.\end{cases} \tag{5}$$

Можно показать, что уравнение (5) при краевых условиях (1′), (1″) и предельного поглощения имеет единственное решение, непрерывное с первыми производными всюду, кроме, может быть, угловых точек (решение понимается как обобщенное [2], или как классическое всюду, кроме точек $0<x<\delta$, $y=0$, где производится сшивание). Это решение назовем $U_M^{(N)}$. Несложно показать, что для обеспечения сходимости $U_M^{(N)}$ к u при M, $N\to\infty$ достаточно наложить на $U_M^{(N)}$ условие, чтобы при $y\geqslant 0$ его коэффициенты Фурье по системе функций $\{e^{i\beta_n x}\}$ при $-N\leqslant n\leqslant N$ совпадали с $C_n e^{-\alpha_n y}$, а при $y\leqslant 0$ – коэффициенты Фурье по системе $\{u_m(x,y)\}$ при $0\leqslant m\leqslant M$ совпадали с A_m. Это условие назовем условием совпадения коэффициентов.

Перейдем к непосредственному вычислению $U_M^{(N)}$. Построим функцию Грина G уравнения Лапласа, удовлетворяющую условиям

$$\Delta G=\delta(x-x',\ y-y'), \quad 0<x<d, \quad 0<x'<d,$$
$$G(x+d,\ y,\ x',\ y')=e^{i\beta d}G(x,\ y,\ x',\ y'),$$
$$G(x,\ \infty,\ x',\ y')=0, \quad \partial G/\partial n|_\Gamma=0.$$

Как легко убедиться, G может быть представлена в виде

$$G=-\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\beta_n(\xi-\xi')}}{2|\beta_n|d}\left(e^{-|\beta_n||\eta-\eta'|}+e^{-|\beta_n||\eta+\eta'|}\right), \tag{6}$$

где $\xi+i\eta=\zeta(z)$ – функция, отображающая конформно область Ω плоскости $z=x+iy$ на полуплоскость $\eta>0$ плоскости ζ так, что $\zeta(0)=0$, $\zeta(d)=d$, $\zeta(\infty)=\infty$. В силу теоремы Римана такое отображение существует для любой непрерывной Γ [3].

Теперь $U_M^{(N)}$ можно записать как

$$U_M^{(N)}=-k^2\left\{\sum_{n=-N}^{N}C_n\int_0^d\int_0^\infty e^{i\beta_n x'-\alpha_n y'}G\,dx'\,dy'+\right.$$

$$\left.+\sum_{m=0}^{M}A_m\iint_D u_m(x',y')G\,dx'\,dy'+A\int_0^d\int_0^\infty e^{i\beta x'+\alpha y'}G\,dx'\,dy'\right\}=$$

$$=\sum_{n=-N}^{N}C_nf_n(x,y)+\sum_{m=0}^{M}A_mg_m(x,y)+Af^{(0)}(x,y). \qquad (7)$$

Условие совпадения коэффициентов приводит к системе линейных алгебраических уравнений для C_n и A_m:

$$A\frac{1}{d}\int_0^d f^{(0)}(x,y)e^{-i\beta_p x}\,dx+\frac{1}{d}\sum_{n=-N}^{N}C_n\int_0^d f_n(x,y)e^{-i\beta_p x}\,dx+$$

$$+\frac{1}{d}\sum_{m=0}^{M}A_m\int_0^d g_m(x,y)e^{-i\beta_p x}\,dx=C_pe^{-\alpha_p y}+\delta_0^pAe^{\alpha y},\quad |p|\leqslant N, \qquad (8_1)$$

$$\sum_{n=-N}^{N}C_n\iint_D f_n(x,y)u_j(x,y)\,dx\,dy+A\iint_D f^{(0)}(x,y)u_j(x,y)\,dx\,dy+$$

$$+\sum_{m=0}^{M}A_m\iint_D g_m(x,y)u_j(x,y)\,dx\,dy=A_j,\quad 0\leqslant j\leqslant M. \qquad (8_2)$$

Преобразуем подсистему (8_1) так, чтобы исключить зависимость от y. Применив к $f_n=\int_0^d\int_0^\infty G\Delta_{x'y'}(e^{i\beta_n x'-\alpha_n y'})\,dx'\,dy'$ формулу Грина и учтя граничные условия, получим

$$f_n(x,y)=e^{i\beta_n x-\alpha_n y}+\int_0^\delta\left(\alpha_nG+\frac{\partial G}{\partial y'}\right)\Bigg|_{y'=0}e^{i\beta_n x'}\,dx'=e^{i\beta_n x-\alpha_n y}+\hat{f}_n(x,y),$$

где $\hat{f}_n$ — гармоническая при $y\neq 0$ функция, удовлетворяющая условиям Флоке (1″); $\hat{f}_n(x,\infty)=0$. Следовательно, при $y>0$ она может быть представлена в виде

$$\hat{f}_n(x,y)=\sum_{s=-\infty}^{\infty}\hat{f}_{ns}e^{i\beta_s x-|\beta_s|y}, \qquad (9)$$

где $\hat{f}_{ns}$ — постоянные коэффициенты.

Аналогично получается

$$f^{(0)}(x,y)=e^{i\beta x+\alpha y}+\hat{f}^{(0)}(x,y)=e^{i\beta x+\alpha y}+\sum_{s=-\infty}^{\infty}\hat{f}_s^{(0)}e^{i\beta_s x-|\beta_s y|},\quad y>0, \qquad (10)$$

$$g_m(x,y)=\sum_{s=-\infty}^{\infty}g_{ms}e^{i\beta_s x-|\beta_s|y},\quad y>0. \qquad (11)$$

Подставляя (9)—(11) в (8_1), можем переписать (8_1) в форме

$$A\hat{f}_p^{(0)}+\sum_{n=-N}^{N}C_n\hat{f}_{np}+\sum_{m=0}^{M}A_m g_{mp}=0,\quad |p|\leqslant N, \tag{12}$$

откуда видно, что искомые величины C_n и A_m на самом деле от y не зависят.

Можно показать, что система (8_1), (8_2) допускает предельный переход $M\to\infty$, $N\to\infty$; получающаяся при этом бесконечная система, будучи переписана в стандартном виде, удовлетворяет условиям Коха ([4]). Определив из (8_1), (8_2) коэффициенты C_n и A_m, находим $U_M^{(N)}$ по формуле (7).

Изложенный метод является численным и должен применяться в сочетании с ЭВМ. Однако при $(d/\lambda)^2\ll1$ в ряде случаев можно получить явные выражения. Например, в случае гребенки с бесконечно тонкими зубцами длины h при $e^{-2\pi h/d}\ll1$ коэффициент отражения $R_0\equiv C_0/A$ получается равным

$$R_0=\frac{a+b+T[(a-b)2^{2b-1}+(a+b)2^{-2b-1}]}{a-b+T[(a+b)2^{2b-1}+(a-b)2^{-2b-1}]},$$

где $a=\alpha d/(2\pi)$, $b=\beta d/(2\pi)$, $T=b\cdot2^{2b}[1/\xi+\psi(b)+\psi(1-b)+2C+2\ln2]$, $\xi=\dfrac{kd}{2\pi}\operatorname{tg}kh$, $\psi(b)=\dfrac{\Gamma'(b)}{\Gamma(b)}$, $C=0{,}5771\ldots$ — постоянная Эйлера.

При $\varphi=\pi/2$ ($\beta=0$) имеем $R_0=e^{2ikh}$, как и следовало ожидать, а при $\varphi=i\chi$, где χ удовлетворяет уравнению

$$\frac{a-b}{(a+b)2^{2b-1}+(a-b)2^{-2b-1}}+T(b)=0,\quad b=\frac{kd}{2\pi}\operatorname{ch}\chi, \tag{13}$$

получаем $R_0=\infty$.

Условие (13) есть характеристическое уравнение для поверхностной волны, в нужном приближении согласующееся с уравнением, следующим из метода факторизации ([5]).

В заключение автор выражает глубокую благодарность чл.-корр. АН СССР Л. А. Вайнштейну за ценные советы и большую помощь при написании этой статьи.

Институт радиофизики и электроники
Академии наук УССР
Харьков

Поступило
30 VII 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *Р. Курант, Д. Гильберт,* Методы математической физики, т. 1, М.— Л., 1951. [2] *С. Л. Соболев,* Уравнения математической физики, М., 1954. [3] *М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат,* Методы теории функций комплексного переменного, М., 1958. [4] *Л. В. Канторович, В. И. Крылов,* Приближенные методы высшего анализа, М.— Л., 1962. [5] *Л. А. Вайнштейн,* Теория дифракции и метод факторизации, М., 1966.