Доклады Академии наук СССР
1974. Том 216, № 5

УДК 517.56 — *МАТЕМАТИКА*

С. М. ВОРОНИН

О НУЛЯХ ЧАСТНЫХ СУММ РЯДА ДИРИХЛЕ ДЗЕТА-ФУНКЦИИ РИМАНА

(Представлено академиком И. М. Виноградовым 8 VI 1973)

Как известно (см., например, [1], стр. 381), отсутствие нулей частных сумм ряда Дирихле для дзета-функции Римана в области $\operatorname{Re} s>1$ влечет за собой справедливость гипотезы Римана. В настоящей статье доказаны четыре теоремы о существовании нулей у таких и подобных сумм правее единичной прямой и в критической полосе.

Теорема 1. *Существует последовательность $x_r\to\infty$ такая, что при всяком $r=1, 2, \ldots$ функция*

$$\Phi_r(s)=\sum_{n\le x_r}\frac{1}{n^s}$$

имеет нули в области $\operatorname{Re} s>1$.

Теорема 2. *Пусть $1/2<\sigma_1<\sigma_2<1$. Существует $x_0=x_0(\sigma_1,\sigma_2)$ такое, что при любом $x>x_0$ функция $\Phi(s)=\sum_{n\le x}(1/n^s)$ имеет бесконечно много нулей в полосе*

$$\sigma_1<\operatorname{Re} s<\sigma_2.$$

Положим, что $\theta_2, \theta_3, \theta_5, \ldots, \theta_p, \ldots$ — вещественные переменные, индексированные простыми числами. Каждой функции

$$\varphi(s)=\sum_{n\le y}\frac{a_n}{n^s}$$

будем ставить в соответствие функцию $\bar\varphi$ от переменных $s, \theta_2, \theta_3, \ldots, \theta_p$ по следующему правилу:

$$\bar\varphi(s,\bar\theta)=\bar\varphi(s,\theta_2,\theta_3,\ldots)=\sum_{n\le y}\frac{a_n}{n^s}\exp\left[-2\pi i\left(\sum_p\alpha_p(n)\theta_p\right)\right],$$

где $\alpha_p(n)$ определяется из канонического разложения

$$n=\prod_p p^{\alpha_p(n)}.$$

Положим

$$f_x(s)=\sum_{n\le x}\frac{1}{n^s}.$$

Доказательство теорем опирается на следующее утверждение.

Лемма. *Если $\bar f_x(\sigma_0,\bar\theta)$ при каком-либо наборе переменных θ_p обращается в нуль, σ_1 и σ_2 таковы, что $\sigma_1<\sigma_0<\sigma_2$, то $f_x(s)$ имеет бесконечно много нулей в области $\sigma_1<\operatorname{Re} s<\sigma_2$.*

Доказательство леммы следует из теоремы Кронекера об аппроксимациях и принципа аргумента.

Доказательство теоремы 1. Будем предполагать справедливость гипотезы Римана. Имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda(n)}{n^s}=\frac{\xi(2s)}{\xi(s)},$$

где $\lambda(n)=\prod_p(-1)^{\alpha_p(n)}$. Пусть $\lambda'(n)$ — вполне мультипликативная функция такая, что:

1) $\lambda'(p)$ лишь для конечного числа простых чисел p отлична от $\lambda(p)$;
2) $|\lambda'(n)|=1$ для всех натуральных n;
3) $\prod_{p\in M}(1-\lambda'(p)/p^{1/2})^{-1}<0$, если M — множество простых, для которых $\lambda'(p)\neq\lambda(p)$.

Имеем

$$\varphi(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda'(n)}{n^s}=\frac{\xi(2s)}{\xi(s)}u(s);$$

$$\varphi_1(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\overline{\lambda'(n)}}{n^s}=\frac{\xi(2s)}{\xi(s)}u_1(s).$$

Заметим, что

$$\operatorname*{Res}_{s=1/2}\varphi(s)=\operatorname*{Res}_{s=1/2}\varphi_1(s)>0. \tag{1}$$

Далее, с помощью частного суммирования получаем

$$\frac{\varphi(s)}{s-1}=\int_1^{\infty}\left(\sum_{n\leqslant x}\frac{\lambda'(n)}{n}\right)x^{-s}\,dx \tag{2}$$

и аналогично

$$\frac{\varphi_1(s)}{s-1}=\int_1^{\infty}\left(\sum_{n\leqslant x}\frac{\overline{\lambda'(n)}}{n}\right)x^{-s}\,dx. \tag{3}$$

Из (1) и (2) заключаем, что

$$\Phi(s)=\int_1^{\infty}\left(\operatorname{Re}\sum_{n\leqslant x}\frac{\lambda'(n)}{n}\right)x^{-s}\,dx=\frac{1}{2}\left[\frac{\varphi(s)+\varphi_1(s)}{s-1}\right]$$

причем из (1) следует, что

$$\operatorname*{Res}_{s=1/2}\Phi(s)=-c<0. \tag{4}$$

Вследствие (4) функция

$$\frac{1}{2}\left[\frac{\varphi(s)+\varphi_1(s)}{s-1}\right]+\frac{c}{s-1/2}.$$

регулярна в точке $s=1/2$ и

$$\frac{1}{2}\left[\frac{\varphi(s)+\varphi_1(s)}{s-1}\right]+\frac{c}{s-1/2}=\int_1^{\infty}\left[\left(\operatorname{Re}\sum_{n\leqslant x}\frac{\lambda'(n)}{n}\right)+\frac{c}{x^{1/2}}\right]x^{-s}\,dx. \tag{5}$$

Поскольку интеграл в (5) расходится в области $\operatorname{Re}s<1/2$ и точка $s=1/2$ не является особой точкой функции $\Phi(s)+c/(s-1/2)$, то

$\operatorname{Re}\sum\limits_{n\leqslant x}\frac{\lambda'(n)}{n}+\frac{c}{x^{1/2}}$ бесконечно много раз меняет знак, в противном случае $s={}^1/_2$ была бы особой точкой функции $\Phi(s)+c/(s-{}^1/_2)$ (см., например, ([2]), стр. 280). Найдется, таким образом, последовательность $x_j\to\infty$ такая, что

$$\operatorname{Re}\sum_{n\leqslant x_j}\frac{\lambda'(n)}{n}+\frac{c}{(x_j)^{1/2}}<0,$$

или

$$\operatorname{Re}\sum_{n\leqslant x_j}\frac{\lambda'(n)}{n}<-\frac{c}{(x_j)^{1/2}}. \tag{6}$$

Далее, с помощью «контурного интегрирования» (([2]), стр. 427) и оценки $\ln\zeta(s)=O((\ln t)^{2-2\sigma+\varepsilon})$, которая при условии справедливости гипотезы Римана имеет место равномерно в области $1\geqslant\operatorname{Re}s=\sigma>\sigma_0>{}^1/_2$ (см. ([1]), стр. 331), получается оценка

$$\left|\sum_{n\leqslant x}\frac{\lambda'(n)}{n}\right|\leqslant\frac{c_1(\varepsilon)}{x^{1/2-\varepsilon}}. \tag{7}$$

Из соображений непрерывности для каждого x_j найдется $\sigma_0=\sigma_0(x_j)>1$ такое, что

$$\operatorname{Re}\sum_{n\leqslant x_j}\frac{\lambda'(n)}{n^{\sigma_0}}<-\frac{c}{2(x_j)^{1/2}},\qquad \left|\sum_{n\leqslant x}\frac{\lambda'(n)}{n^{\sigma_0}}\right|\leqslant\frac{2c_1(\varepsilon)}{x_j^{1/2-\varepsilon}}. \tag{8}$$

Из (8) следует существование $\bar\theta_0$ такого, что

$$\begin{gathered}\operatorname{Re}\tilde f_{x_j}(\sigma_0(x_j),\bar\theta_0)<-\frac{c}{2(x_j)^{1/2}},\\ |\tilde f_{x_j}(\sigma_0,\bar\theta_0)|\leqslant\frac{2c_1(\varepsilon)}{x^{1/2-\varepsilon}}.\end{gathered} \tag{9}$$

Представляя $\tilde f_x(s)$ в виде

$$\tilde f_x(s)=\overline{\sum_{x/2<p\leqslant x}\frac{1}{p^s}}+\overline{\sum_{\substack{n\leqslant x\\ n\neq p\in(x/2,x]}}\frac{1}{n^s}},$$

из геометрических соображений заключаем, что вследствие неравенств (9) найдется $\bar\theta$ такое, что $\tilde f_x(\sigma_0,\bar\theta)=0$ (при x_j достаточно больших). Вследствие леммы утверждение теоремы справедливо.

Если гипотеза Римана неверна, то функция

$$L(x)=\sum_{n\leqslant x}\frac{\lambda(n)}{n}$$

бесконечно много раз меняет знак.

Пользуясь соображениями, аналогичными предыдущим, получим, что и в этом случае $f_{x_r}(s)$ будут иметь нули в области $\operatorname{Re}s>1$ при соответствующих x_r.

Доказательство теоремы 2 получается из рассмотрения множеств значений сумм $\sum\limits_{x/2<p\leqslant x}(1/p^s)$ и $\sum\limits_{\substack{n\geqslant x\\ n\neq p\in(x/2,\,x)}}(1/n^s)$.

Теорема 3. *Пусть χ — характер Дирихле. Существует последовательность $x_r \to \infty$ такая, что при всяком $r=1, 2, \dots$ функция $\Phi_r(s) = \sum_{n \leqslant x_r} (\chi(n)/n^s)$ имеем нули в области* $\operatorname{Re} s > 1$.

Теорема 4. *Пусть $1/2 < \sigma_1 < \sigma_2 < 1$, χ — характер Дирихле. Существует $x_0 = x_0(\sigma_1, \sigma_2)$ такое, что при любом $x > x_0$ функция $\Phi_x(s) = \sum_{n \leqslant x} (\chi(n)/n^s)$ имеет бесконечно много нулей в полосе* $\sigma_1 < \operatorname{Re} s < \sigma_2$.

Поступило
22 V 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *Е. К. Титчмарш*, Теория дзета-функции Римана, ИЛ, 1953. [2] *К. Прахар*, Распределение простых чисел, М., 1967.