Доклады Академии наук СССР
1974. Том 216, № 5

УДК 519.24+539.172.8

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

В. Я. ГАЛКИН

ПРЯМЫЕ ЗАДАЧИ ПРИ РАЗДЕЛЕНИИ МНОЖЕСТВЕННОСТИ ЯДЕРНЫХ ПРОЦЕССОВ

(Представлено академиком Ю. В. Прохоровым 5 X 1973)

1. Рассматриваемые задачи возникают в физике ядерных реакций при регистрации вторичных частиц — продуктов множественных ядерных процессов. Реакции различаются при этом не типом продуктов, а их множественностью: числом вторичных частиц. В эксперименте пучок первичных частиц направляется на образец — мишень, на ядрах которого могут происходить и реакции, характеризующиеся вылетом одной, двух, ..., k неразличимых вторичных частиц. Числа ζ_j, $j=1,\ldots,k$, актов реакции j-го типа трактуются как взаимно независимые пуассоновские случайные величины (с.в.) $\zeta_j\sim\mathrm{Po}(\lambda_j)$; λ_j имеет смысл среднего числа актов реакции типа j (за цикл работы ускорителя или в единицу времени). Вторичные частицы независимо от типа реакции регистрируются счетной системой с известной эффективностью регистрации ε. Интерес представляет распределение с.в. ξ — числа зарегистрированных вторичных частиц. Типичные примеры подобной схемы возникают при исследовании фотонейтронных реакций множественности k (γ, n), $(\gamma, 2n), \ldots, (\gamma, kn)$ [1-4] и нуклон-нуклонных взаимодействий, скажем, (n, n), $(n, 2n)$ [5].

2. Описанная ситуация в случае постоянной интенсивности пучка первичных частиц формализуется введением с.в. $\zeta=\zeta_1+2\zeta_2+\ldots+k\zeta_k$ и рассмотрением условной с.в. $\xi|\zeta\sim\mathrm{Bi}(\zeta,\varepsilon)$.

Теорема 1. *Функция вероятностей (ф.в.) $p_n=P\{\xi=n\}$ с.в. ξ имеет вид следующей $(k-1)$-кратной суммы:*

$$p_n=\exp\left(-\sum_{\nu=1}^{k}y_\nu\right)\sum_{i_\nu=0,\,\nu=k,\ldots,2}^{\left[\frac{1}{\nu}(n-I_{\nu+1})\right]}\frac{y_1^{n-I_2}}{(n-I_2)!}\prod_{\nu=2}^{k}\frac{y_\nu^{i_\nu}}{i_\nu!},\quad n=0,1,\ldots,\tag{1}$$

где

$$y_\nu=\varepsilon^\nu\sum_{j=\nu}^{k}C_j^\nu(1-\varepsilon)^{j-\nu}\lambda_j,\quad I_\nu=\sum_{j=\nu}^{k}ji_j,\quad I_{k+1}=0.$$

В случае $k=1$ (отсутствие множественности) $\xi\sim\mathrm{Po}(\varepsilon\lambda_1)$, а в случае стопроцентной эффективности регистрации с.в. $\xi=\zeta$ имеет ф. в. вида (1) с заменой y_ν на λ_ν, $\nu=1,\ldots,k$; так распределено число вылетевших неразличимых вторичных частиц.

Если ввести новые параметры $\alpha_1, \beta_2, \ldots, \beta_k$:

$$\alpha_1=\sum_{\nu=1}^{k}\nu y_\nu=\varepsilon\sum_{\nu=1}^{k}\nu\lambda_\nu,\quad \beta_j=\frac{y_j}{\alpha_1};\quad \beta_1=1-\sum_{\nu=2}^{k}\nu\beta_\nu,\quad \beta=\sum_{\nu=1}^{k}\beta_\nu,$$

имеющие наглядный физический смысл: α_1 — среднее число зарегистрированных за цикл ускорения вторичных частиц, β_j — вероятность того, что на один акт реакции любого типа будет приходиться ровно j зарегистрированных частиц, то при больших α_1 с.в. ξ асимптотически нормальна $N(\alpha_1; [\alpha_1 \sum_{\nu=1}^{k} \nu^2\beta_\nu]^{1/2})$.

Вопрос о вычислении значений p_n и производных решает

Теорема 2. *Ф.в. p_n удовлетворяет разностному уравнению*

$$np_n = \sum_{\nu=1}^{k} \nu y_\nu p_{n-\nu} \equiv \alpha_1 \sum_{\nu=1}^{k} \nu\beta_\nu p_{n-\nu}, \quad n=1, 2, \ldots, \tag{2}$$

с начальными условиями

$$p_0 = \exp\left(-\sum_{\nu=1}^{k} y_\nu\right) \equiv \exp(-\alpha_1\beta), \quad p_{-1}=p_{-2}=\ldots=0.$$

При этом

$$\partial p_n/\partial y_\nu = -p_n + p_{n-\nu}, \quad \nu=1, \ldots, k.$$

Ф.в. p_n в случаях $k=2$; 3 представлена на рис. 1 при различных β_j и α_1. Для $k=2$ при $\beta_2 \leqslant 0{,}2$ вид ф.в. мало отличается от пуассоновского: заметно лишь уширение распределений при $\alpha_1=2$; 4. При бо́льших β_2 и в случае $k=3$ структура p_n существенно отличается от пуассоновской, что объясняется вкладом, который дает, начиная с $n=2$, с.в. ζ_2.

3. В реальном эксперименте неизбежны колебания интенсивности пучка первичных частиц. Число актов реакций за промежуток измерений (цикл ускорения) зависит от числа первичных частиц, инициирующих ядерный процесс. Если последнее, а следовательно, и α_1, флуктуирует по некоторому закону, то ф.в. регистрации n вторичных частиц должна усредняться по этим флуктуациям ([4], [6]). Рассмотрев случай, когда α_1, λ_j — с.в., однако λ_j/α_1 от цикла к циклу не меняются, что равносильно постоянству β_j, $j=1, \ldots, k$, приходим к следующей формальной схеме. Есть (непрерывная) с.в. τ с распределением $F(\alpha_1)$. Пусть условная с.в. $\xi|\tau$ подчиняется распределению

$$p_n(\alpha_1, \beta) = e^{-\alpha_1\beta} \sum_{i_\nu=0,\ \nu=k, \ldots, 2}^{\left[\frac{1}{\nu}(n-I_{\nu+1})\right]} \alpha_1^{n-I_2+J_2} \frac{\beta_1^{n-I_2}}{(n-I_2)!} \prod_{\nu=2}^{k} \frac{\beta_\nu^{i_\nu}}{i_\nu!}, \quad J_2 = \sum_{\nu=2}^{k} i_\nu. \tag{1'}$$

Безусловное распределение с.в. ξ задается интегралом

$$\bar{p}_n = \int p_n(\alpha_1, \beta)\, dF(\alpha_1), \tag{3}$$

и мы рассмотрим важные с практической точки зрения осреднения с усеченным нормальным и равномерным распределениями.

4. Осредняющее распределение имеет плотность

$$\bar{f}(\alpha_1; \bar{\alpha}_1, \gamma) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}\bar{\alpha}_1\gamma} \frac{1}{1-\Phi(-\gamma^{-1})} \exp\left\{-\frac{(\alpha_1-\bar{\alpha}_1)^2}{2\bar{\alpha}_1^2\gamma^2}\right\}, \quad \alpha_1 \geqslant 0,$$

где $\bar{\alpha}_1 > 0$, $\Phi(x)$ — интеграл вероятностей, а параметр γ имеет смысл величины относительных флуктуаций интенсивности пучка первичных частиц. Ограничимся условиями $\gamma \ll 1$, $\bar{\alpha}_1 \ll 1/(\beta\gamma^2)$, которые специально поддержи-

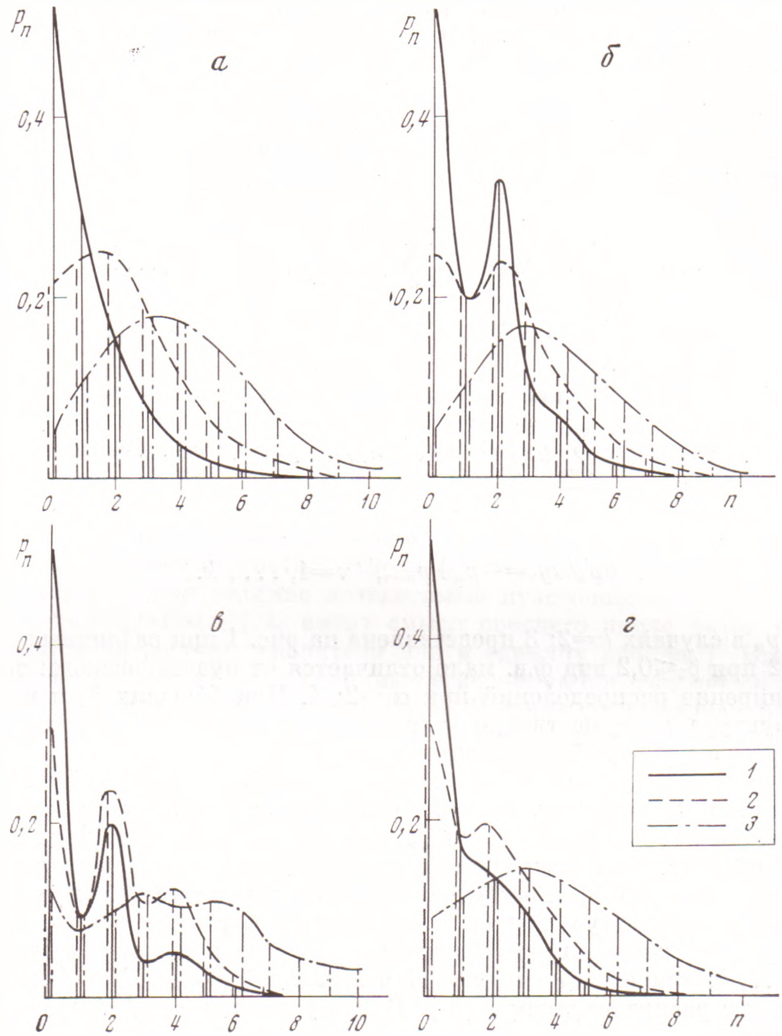

Рис. 1. Функция вероятностей p_n при различных β_j и α_1: *а* — $\beta_2=0{,}2$; *б* — $\beta_2=0{,}3$; *в* — $\beta_2=0{,}4$; *г* — $\beta_2=0{,}2$; $\beta_3=0{,}1$. $\alpha_1=1$ (*1*), 2 (*2*), 4 (*3*)

ваются при проведении эксперимента по разделению множественности. В указанных предположениях интеграл (3) $p_n^{\bar{N}}$ при всех n близок к «распределению»

$$p_n^N=\int\limits_{-\infty}^{\infty}p_n(\alpha_1,\beta)\,f(\alpha_1;\bar{\alpha}_1,\gamma)\,d\alpha_1, \tag{4}$$

где $f(\alpha_1;\bar{\alpha}_1,\gamma)$ — плотность нормального распределения $N(\bar{\alpha}_1;\bar{\alpha}_1\gamma)$.

Т е о р е м а 3. *Имеет место оценка*

$$|p_n^{\bar{N}}-p_n^N|/p_n^N<\Phi(-1/\gamma)+\{1-\Phi(-1/\gamma)\}\exp[-1/(4\gamma^2)]. \tag{5}$$

Вопрос о вычислении p_n^N решается так же, как и для p_n:

Т е о р е м а 4. *Аппроксимирующая функция имеет вид*

$$p_n^N=\exp[\bar{\alpha}_1\beta(\bar{\alpha}_1\beta\beta_{k+1}-1)]\sum_{i_{k+1}=0}^{\left[\frac{1}{2}(n-I_2+J_2)\right]}\ \sum_{i_\nu=0,\ \nu=k,\ldots,2}^{\left[\frac{1}{\nu}(n-I_{\nu+1})\right]}(n-I_2+J_2)!\,\bar{\alpha}_1^{n-I_2+J_2}\times$$

$$\times \frac{(1-2\bar{\alpha}_1\beta\beta_{k+1})^{n-I_2+J_2-2i_{k+1}}}{(n-I_2+J_2-2i_{k+1})\,!} \frac{\beta_1^{n-I_2}}{(n-I_2)\,!} \prod_{\nu=2}^{k+1} \frac{\beta_\nu^{i_\nu}}{i_\nu!}, \quad \beta_{k+1} = \frac{\gamma^2}{2}, \tag{6}$$

и при натуральных n удовлетворяет разностному уравнению

$$np_n{}^N = \bar{\alpha}_1(1-2\bar{\alpha}_1\beta\beta_{k+1}) \sum_{\nu=1}^{k} \nu\beta_\nu p_{n-\nu}^N + 2\bar{\alpha}_1{}^2\beta_{k+1} \sum_{\nu=1}^{k}\sum_{\mu=1}^{k} \nu\beta_\nu\beta_\mu p_{n-\nu-\mu}^N \tag{7}$$

с начальными условиями

$$p_0{}^N = \exp[\bar{\alpha}_1\beta(\bar{\alpha}_1\beta\beta_{k+1}-1)], \quad p_{-1}{}^N = p_{-2}{}^N = \ldots = 0.$$

5. В случае усреднения с равномерным распределением

$$f^R(\alpha_1; \bar{\alpha}_1, \beta_{k+1}) = 1/2\beta_{k+1}, \qquad \alpha_1 \in [\bar{\alpha}_1 - \beta_{k+1}, \bar{\alpha}_1 + \beta_{k+1}]$$

ф.в. регистрации n вторичных частиц имеет вид

$$p_n{}^R = e^{-\bar{\alpha}_1\beta} \sum_{i_\nu=0,\, \nu=k,\ldots,2}^{\left[\frac{1}{\nu}(n-I_{\nu+1})\right]} \sum_{j=0}^{n-I_2+J_2} \sum_{i_{k+1}=0}^{n-I_2+J_2-j} \frac{(n-I_2+J_2)\,!}{\beta^j} \times$$

$$\times\, i^{i_{k+1}+3} \frac{\operatorname{Sh}\left(\beta\beta_{k+1} + i\dfrac{\pi}{2} i_{k+1}\right)}{\beta\beta_{k+1}} \frac{\bar{\alpha}_1^{n-I_2+J_2-j-i_{k+1}}}{(n-I_2+J_2-j-i_{k+1})\,!} \prod_{\nu=2}^{k+1} \frac{\beta_\nu^{i_\nu}}{i_\nu!}. \tag{8}$$

При $\bar{\alpha}_1 \to +\infty$ асимптотику дает следующая

Теорема 5. *С.в.* ξ *асимптотически нормальна* $N(\bar{\alpha}_1;\ [\bar{\alpha}_1 \sum_{\nu=1}^{k} \nu^2\beta_\nu + \beta^2_{k+1}/3]^{1/2})$, *если* $\beta_{k+1} = \mathrm{const}$; *если же* $\bar{\alpha}_1/\beta_{k+1} = \mathrm{const}$, *с.в.* ξ *асимптотически равномерна* $R(\bar{\alpha}_1;\ [\bar{\alpha}_1 \sum_{\nu=1}^{k} \nu^2\beta_\nu + \beta^2_{k+1}/3]^{1/2})$.

Выражаю свою признательность акад. А. Н. Тихонову, Л. Н. Большеву и М. В. Уфимцеву за обсуждение результатов, а также В. Н. Орлину и Б. И. Горячеву, из работ с которыми возникли рассмотренные задачи.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
20 IX 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *Б. И. Горячев*, Атомная энергия, т. 12, 3 (1962). [2] *S. Costa*, Nuclear Instrum. and Meth., v. 21, 1 (1963). [3] *B. C. Cook, C. C. Jones*, Nuclear Instrum. and Meth., v. 59, 2 (1968). [4] *В. Я. Галкин, Б. И. Горячев и др.*, Сборн. Вычислит. методы и програм., т. 18, М., 1972. [5] *V. J. Ashby, H. C. Carton et al.*, Phys. Rev. v. 111, 2 (1958). [6] *В. Я. Галкин, В. Н. Орлин*, Тр. НИВЦ МГУ. Некоторые вопросы автоматизированной обработки и интерпретации физических экспериментов, в. 1, М., 1973.