Доклады Академии наук СССР
1974. Том 216, № 5

УДК 519.46 МАТЕМАТИКА

В. В. ГОРБАЦЕВИЧ

О КЛАССИФИКАЦИИ ОДНОРОДНЫХ ПРОСТРАНСТВ

(Представлено академиком В. С. Владимировым 26 XII 1973)

Под однородным пространством мы будем понимать связное однородное пространство группы Ли, транзитивное действие которой всегда будет предполагаться локально-эффективным. Напомним, что асферичным (или имеющим тип $K(\pi, 1)$) называется такое многообразие M, у которого все гомотопические группы $\pi_k(M)$, кроме, быть может, $\pi_1(M)$, равны нулю. Мы рассмотрим некоторые свойства асферичных однородных пространств, связанные с их классификацией. Затем будет приведен список всех трехмерных (не только асферичных) однородных пространств.

Предложение 1. *Если связная группа Ли G транзитивна на асферичном многообразии M, то в G существует транзитивная на M асферичная замкнутая подгруппа G_1. Если при этом G односвязна, то G_1 можно выбрать диффеоморфной эвклидову пространству.*

Для доказательства достаточно рассмотреть случай, когда G односвязна. В этом случае нетрудно показать, что если $M=G/H$, то H содержит некоторую максимальную компактную в G подгруппу K. Далее применяется

Теорема 1. *Если G — полупростая вещественная группа Ли, а K — ее максимальная компактная подгруппа, то существует такая замкнутая диффеоморфная $\mathbf{R}^n$ подгруппа $G_1 \subset G$, что $G_1 \cdot K=G$ и $G_1 \cap K=\{e\}$.*

Такое же утверждение верно и для произвольной односвязной группы Ли G.

Замечания. 1) Односвязная группа Ли диффеоморфна $\mathbf{R}^n$ тогда и только тогда, когда ее подгруппа Леви изоморфна $\mathscr{A}\times\ldots\times\mathscr{A}$, где $\mathscr{A}$ — это универсальная накрывающая для $SL(2, \mathbf{R})$.

2) Для однородного пространства M эквивалентны следующие условия:

(I) M асферично.

(II) Все гомотопические группы $\pi_k(M)$, кроме, быть может, $\pi_1(M)$, конечны.

(III) Универсальная накрывающая $\tilde{M}$ диффеоморфна $\mathbf{R}^n$.

3. Из теоремы 1 следует, что в произвольной полупростой группе Ли G существует связная равномерная подгруппа G_1. Оказывается, что минимальными среди связных равномерных в G подгрупп будут в точности те G_1, для которых $G_1 \cap K=\{e\}$. Используя результаты работы (7), можно дать явное описание таких минимальных G_1 в терминах схемы Сатаке алгебры Ли $\mathfrak{G}$ группы G.

Следующая теорема касается строения групп Ли, транзитивных на компактных асферичных многообразиях.

Теорема 2. *Пусть G — односвязная группа Ли, транзитивная на компактном асферичном многообразии M. Тогда:*

(I) *G диффеоморфна $\mathbf{R}^n$.*

(II) *Если $M=G/H$, а $G=S\cdot R$ — разложение Леви, то существует такая максимальная связная треугольная в S подгруппа T, что $H_0 \subset T\cdot R$, где H_0 — связная компонента единицы в H. В частности, H_0 разрешима.*

Утверждение (I) легко следует из результатов (2). Назовем транзитивное и локально-эффективное действие группы G на M несократимым, если в G не существует собственных подгрупп, транзитивных на M. Теорема 2 остается верной, если отказаться от требования компактности M, но предположить, что G действует на M несократимо.

Следующая теорема является уточнением вещественного аналога расслоения Титса (см. [6]) в случае, когда M асферично.

Теорема 3. *Пусть M — компактное асферичное однородное пространство. Тогда существует расслоение $M' \to M \to T^n$ с n-мерным тором T^n в качестве базы и слоем $M' = G'/\Gamma$, где Γ — дискретная равномерная подгруппа в группе Ли G', диффеоморфной $\mathbf{R}^n$.*

Следствие. *Эйлерова характеристика $\chi(M)$ компактного асферичного однородного пространства равна нулю.*

Теперь мы сосредоточим внимание на таких компактных однородных пространствах M типа $K(\pi, 1)$, для которых $\pi = \pi_1(M)$ разрешима. Таковыми, в частности, являются компактные солвмногообразия (т. е. однородные пространства разрешимых групп Ли). Пусть G — односвязная группа Ли, транзитивная на таком M, а $G = S \cdot R$ — ее разложение Леви. Через T обозначим произвольную максимальную связную треугольную в S подгруппу, а через $C(G)$ — группу $Z(S) \cdot T \cdot R$, где $Z(S)$ — центр группы S. Группа $C(G)$ с точностью до изоморфизма не зависит от выбора T и S.

Предложение 2. *Пусть $M = G/H$, тогда существует такая $T \subset S$, что $H \subset Z(S) \cdot T \cdot R$. Если G несократима на M, то $H_0 \subset [T, T] \cdot R$.*

Так как H равномерна в G, то $H' = H \cap R'$ равномерна в $R' = (C(G))_0$. Обратно, если подгруппа H' равномерна в R', то $H = Z(S) \cdot H'$ будет равномерна в G. Поэтому предложение 2 позволяет свести в некотором смысле изучение таких пар (G, H) к изучению равномерных подгрупп в разрешимых группах Ли вида $(C(G))_0$. Кроме того, из предложения 2 в сочетании с результатами работ [1, 8] вытекает

Теорема 4. *Произвольное компактное однородное пространство M типа $K(\pi, 1)$ с разрешимой $\pi = \pi_1(M)$ гомеоморфно некоторому солвмногообразию.*

Группа называется почти нильпотентной, если она содержит нильпотентную подгруппу конечного индекса.

Теорема 5. *Пусть M — компактное многообразие типа $K(\pi, 1)$ с почти нильпотентной π, а G — односвязная группа Ли, транзитивная на M. Тогда:*

(I) *$\pi = \pi_1(M)$ — разрешима.*

(II) *Разложение Леви $G = S \cdot R$ группы G прямое.*

(III) *Корни присоединенного представления радикала R по модулю равны единице.*

(IV) *Если G несократима на M, то $\dim G \leqslant 2n^2$, где $n = \dim M$.*

Если M — компактное многообразие и $\dim M \leqslant 3$, то всякая односвязная группа Ли G, несократимо действующая на M, имеет прямое разложение Леви (см. теорему 7). Однако можно построить такое четырехмерное компактное многообразие M_0^4 с разрешимой $\pi_1(M_0^4)$, и группу Ли G, несократимо действующую на M_0^4, что разложение группы G не является прямым.

Заметим, что утверждение (IV) из теоремы 5 противоречит результату работы [3], где утверждается, что на произвольном компактном солвмногообразии может транзитивно действовать разрешимая группа Ли сколь угодно высокой размерности.

Предложение 2 и теорема 5 позволяют описать все транзитивные действия групп Ли G на торе T^n (в случае, когда G разрешима, это сделано в [3]). Рассмотрим следующую конструкцию. Пусть $S = \mathop{\times}\limits_{i=1}^{k} \mathscr{A}(i)$, где $\mathscr{A}(i)$ изоморфны $\mathscr{A}$, а $R = \mathbf{R}^s \times_\varphi \mathbf{R}^t$ — полупрямое произведение $\mathbf{R}^s$ и $\mathbf{R}^t$, причем $\varphi(\mathbf{R}^s)$ — компактная подгруппа в $\mathrm{Aut}(\mathbf{R}^t)$. Положим $G = S \times R$, тогда $C(G) = \mathbf{Z}^k \times T \times R$, где T — некоторая максимальная связная треугольная в S подгруппа. Пусть $R_1 = T \times R / [T, T]$, в $\lambda\colon T \times R \to R_1$ — соответствующий эпиморфизм. С помощью конструкции, указанной в [3], выберем в R_1 некоторую равномерную подгруппу H_1 и дополним $\lambda^{-1}(H_1)$ до равномерной подгруппы H в $C(G)$ такой, что $(H)_0=(\lambda^{-1}(H_1))_0$. Тогда H равномерно в G.

Теорема 6. *Если G — односвязная группа Ли, транзитивная на T^n, и $T^n=G/H$, то пара (G, H) может быть получена с помощью приведенной выше конструкции.*

Обратно, если в построенной выше G выбрать H так, чтобы $\pi_0(H)$ была абелева, а R была локально-эффективна на $R/R\cap H$, то G/H диффеоморфно тору и действие G локально-эффективно.

Следствие. *Если G несократимо действует на T^n, то* $\dim G\leqslant 2n-\max(1, k)$, *где k — это число простых сомножителей в полупростой части группы G, и эта оценка является точной.*

В работе [4] перечислены все однородные двумерные многообразия (найденные еще Э. Картаном) и группы Ли, транзитивные на них. Следующая теорема дает перечисление всех трехмерных однородных пространств (в том числе и не асферичных), а также групп Ли, несократимых на компактных таких многообразиях.

Теорема 7. *Пусть M — однородное трехмерное многообразие, а $\boldsymbol{G}$ — односвязная группа Ли, несократимая на M. Тогда имеет место один из следующих случаев:*

I. *M некомпактно.*

Асферичные многообразия: $\mathbf{R}^3$, $T^2\times\mathbf{R}^1$, $K^2\times\mathbf{R}^1$, $S^1\times\mathbf{R}^2$, $\mathrm{Mb}\times\mathbf{R}^1$, $\mathrm{Mb}\times S^1$, M_0^3, $\mathscr{A}/\Gamma$. При этом K^2 обозначает бутылку Клейна, Mb — лист Мёбиуса, а Γ — дискретная подгруппа в $\mathscr{A}$. Многообразие M_0^3 можно описать следующим образом: рассмотрим расслоение $S^1\to K^2\xrightarrow{f} S^1$, над S^1 — линейное расслоение, диффеоморфное Mb. Тогда M_0^3 диффеоморфно линейному расслоению над K^2, индуцированному расслоением $\mathrm{Mb}\to S^1$ с помощью отображения $f\colon K^2\to S^1$.

Неасферичные многообразия: $S^2\times\mathbf{R}^1$, $\mathbf{R}P^2\times\mathbf{R}^1$; $L(\mathbf{R}P^2)$ — диффеоморфно нетривиальному линейному расслоению над $\mathbf{R}P^2$.

II. *M компактно.*

Асферичные многообразия.

1) M — солвмногообразие, $M\neq T^3$. Тогда G разрешима. Такие M однозначно определяются своими фундаментальными группами (см. [5]), которые имеют вид $\mathbf{Z}\cdot\mathbf{Z}^2$ и легко перечисляются;

2) $M=T^3$, тогда либо G разрешима (и тогда описана в [3]), либо $G=\mathscr{A}\times\mathbf{R}^1$;

3) $M=\mathscr{A}/\Gamma$, где Γ — равномерная дискретная подгруппа в $\mathscr{A}$; здесь $G=\mathscr{A}$.

Неасферичные многообразия.

4) $M=S^2\times S^1$, $G=\mathrm{SU}(2)\times\mathbf{R}^1$;

5) $M=\mathbf{R}P^2\times S^1$, $G=\mathrm{SU}(2)\times\mathbf{R}^1$;

6) $M=\mathrm{SU}(2)/\Gamma$, где Γ — конечная подгруппа в $\mathrm{SU}(2)$, $G=\mathrm{SU}(2)$.

Аналогичным образом можно классифицировать и все четырехмерные компактные однородные асферичные многообразия и группы Ли, несократимо действующие на них.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
14 XII 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *L. Auslander*, Am J. Math., v. 82, № 4, 689 (1960). [2] *P. Conner, D. Montgomery*, Michigan Math. J., v. 6, № 4, 405 (1960). [3] *R. Johnson*. Am. J. Math., v. 94, № 1, 82 (1972). [4] *G. Mostow*, Ann. Math., v. 52, № 3, 606 (1950). [5] *G. Mostow*, Ann. Math., v. 60, № 1, 1 (1954). [6] *А. Л. Онищик*, Матем. сборн., т. 71 (113), № 4, 483 (1966). [7] *А. Л. Онищик*, Матем. сборн., т. 74 (116), № 3, 398 (1967). [8] *C. T. C. Wall*, Topology of Manifolds, (Proc. Inst. Univ. of Georgia, Athens, 1969), Markham, Chicago, 1970, p. 319.