Доклады Академии наук СССР
1974. Том 216, № 5

УДК 539.3 *ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ*

Член-корреспондент АН СССР Э. И. ГРИГОЛЮК, Б. Л. ПЕЛЕХ

КОМПЛЕКСНЫЙ ВАРИАНТ ТЕОРИИ МНОГОСЛОЙНЫХ ОБОЛОЧЕК, СИММЕТРИЧНО СОБРАННЫХ ИЗ ТРАНСВЕРСАЛЬНО ИЗОТРОПНЫХ СЛОЕВ

До настоящего времени уравнения в комплексной форме ([1]) построены для некоторых классов многослойных оболочек при выполнении гипотез Кирхгофа – Лява для всего пакета ([2-4]). Возможность комплексного преобразования в теории ([6]) трехслойных оболочек с легким упругим заполнителем обоснована в ([7]).

В данной работе обнаружено, что комплексный метод В. В. Новожилова ([1]) допускает обобщение на теорию многослойных оболочек, построенную с учетом деформаций поперечного сдвига ([2], [5]) в одном специальном случае, когда коэффициенты Пуассона слоев одинаковы.

Рассмотрим оболочку постоянной толщины $2h$, симметрично собранную из $2n+1$ трансверсально изотропных слоев. Принимая для всего пакета оболочки гипотезу о линейном законе изменения перемещений по толщине, получим следующие соотношения упругости:

$$T^{\alpha\beta}=\hat{B}E_1^{\alpha\beta\gamma\delta}\varepsilon_{\gamma\delta},\quad M^{\alpha\beta}=\hat{D}E_2^{\alpha\beta\gamma\delta}\varkappa_{\gamma\delta},\qquad N^\alpha=\hat{G}\varepsilon^{\alpha z},\tag{1}$$

где

$$\hat{B}=2\sum_{j=1}^{n+1}\frac{E_j(\zeta_j-\zeta_{j-1})}{1-\nu_j^2},\quad \hat{D}=\frac{2}{3}\sum_{j=1}^{n+1}\frac{E_j(\zeta_j^3-\zeta_{j-1}^3)}{1-\nu_j^2},$$

$$\hat{G}=2\sum_{j=1}^{n+1}k_j'G_j'(\zeta_j-\zeta_{j-1}),\quad E_{1,2}^{\alpha\beta\gamma\delta}=a^{\alpha\gamma}a^{\beta\delta}+\mu_{1,2}c^{\alpha\gamma}c^{\beta\delta},\tag{2}$$

$$\mu_1=\sum_{j=1}^{n+1}\frac{E_j\nu_j(\zeta_j-\zeta_{j-1})}{1-\nu_j^2}\Big/\sum_{j=1}^{n+1}\frac{E_j(\zeta_j-\zeta_{j-1})}{1-\nu_j^2},$$

$$\mu_2=\sum_{j=1}^{n+1}\frac{E_j\nu_j(\zeta_j^3-\zeta_{j-1}^3)}{1-\nu_j^2}\Big/\sum_{j=1}^{n+1}\frac{E_j(\zeta_j^3-\zeta_{j-1}^3)}{1-\nu_j^2},$$

$T^{\alpha\beta}$, $M^{\alpha\beta}$, $\varepsilon_{\alpha\beta}$, $\varkappa_{\alpha\beta}$, N^α, $\varepsilon_{\alpha z}$ — тензоры тангенциальных сил, моментов, тангенциальных и изгибных деформаций, векторов поперечных сил и деформаций соответственно; $a^{\alpha\beta}$, $b^{\alpha\beta}$ — тензоры первой и второй квадратичной форм основной поверхности, $c^{\alpha\beta}$ — компоненты дискриминантного тензора; индексом (j) отмечены модули упругости и коэффициенты Пуассона j-го слоя, G_j' — модуль сдвига в площадках, перпендикулярных срединной поверхности j-го слоя, k_j' — коэффициент сдвига, $2(\zeta_j-\zeta_{j-1})$ — толщина слоев.

Компоненты деформации связаны со смещениями v_α, w и углами поворота нормали φ_α соотношениями

$$\varepsilon_{\alpha\beta}={}^1/_2(\nabla_\alpha v_\beta+\nabla_\beta v_\alpha-2b_{\alpha\beta}w),\quad \varkappa_{\alpha\beta}={}^1/_2(\nabla_\alpha\varphi_\beta+\nabla_\beta\varphi_\alpha),$$
$$\varepsilon_{\alpha z}=\varphi_\alpha+\nabla_\alpha w-b_{\alpha\beta}v^\beta. \tag{3}$$

В рамках (1)—(3) известная статико-геометрическая аналогия обобщается на теорию слоистых оболочек и записывается в виде соответствий

$$T^{\alpha\beta}\leftrightarrow c^{\alpha\gamma}c^{\beta\delta}\{\varkappa_{\gamma\delta}-{}^1/_2(\nabla_\delta\varepsilon_{\gamma z}+\nabla_\gamma\varepsilon_{\delta z})\},$$
$$N^\alpha\leftrightarrow -c^{\alpha\beta}(\eta_\beta+c^{\tau\gamma}b_{\beta\gamma}\varepsilon_{\tau z}), \tag{4}$$
$$M^{\alpha\beta}\leftrightarrow -c^{\alpha\gamma}c^{\beta\delta}\varepsilon_{\gamma\delta}.$$

На этой основе введем, как это сделано В. В. Новожиловым ([1]) в классической теории однородных изотропных оболочек, комплексные усилия и моменты по формулам

$$\tilde T^{\alpha\beta}=T^{\alpha\beta}-i\lambda c^{\alpha\gamma}c^{\beta\delta}\{\varkappa_{\gamma\delta}-{}^1/_2(\nabla_\delta\varepsilon_{\gamma z}+\nabla_\gamma\varepsilon_{\delta z})\},$$
$$\tilde N^\alpha=N^\alpha+i\lambda c^{\alpha\beta}(\eta_\beta+c^{\tau\gamma}b_{\beta\gamma}\varepsilon_{\tau z}), \tag{5}$$
$$\tilde M^{\alpha\beta}=M^{\alpha\beta}+i\lambda c^{\alpha\gamma}c^{\beta\delta}\varepsilon_{\gamma\delta},$$

где $i^2=-1$, λ — некоторый постоянный множитель, который определим в дальнейшем.

Системы уравнений равновесия и совместности запишутся теперь в виде одной системы в комплексных усилиях и моментах

$$\nabla_\alpha\tilde T^{\alpha\beta}-b_\alpha{}^\beta\tilde N^\alpha+q^\beta=0,\quad \nabla_\alpha\tilde N^\alpha+b_{\alpha\beta}\tilde T^{\alpha\beta}+q=0,$$
$$\nabla_\alpha\tilde M^{\alpha\beta}-\tilde N^\beta+m^\beta=0. \tag{6}$$

Комплексные моменты могут быть выражены через комплексные усилия. Действительно, на базе соотношений (1) и (5) имеем

$$\varepsilon_{\alpha\beta}=\frac{1}{\hat B(1-\mu_1{}^2)}P_{\alpha\beta\gamma\delta}\,\mathrm{Re}\,\tilde T^{\gamma\delta},\quad \varepsilon_{\alpha z}=\frac{\mathrm{Re}\,\tilde N^\alpha}{\hat G},$$

$$\varkappa_{\alpha\beta}=-\frac{1}{\lambda}c_{\gamma\alpha}c_{\delta\beta}\,\mathrm{Im}\,\tilde T^{\gamma\delta}+\frac{1}{2\hat G}\mathrm{Re}\,\tilde\Pi_{\alpha\beta}, \tag{7}$$

$$P_{\alpha\beta\gamma\delta}=a_{\alpha\gamma}a_{\beta\delta}-\mu_1c^{\alpha\gamma}c^{\beta\delta},\quad \tilde\Pi_{\alpha\beta}=\nabla_\alpha\tilde N_\beta+\nabla_\beta\tilde N_\alpha.$$

Подставляя (7) в (5), приходим к формуле

$$\tilde M^{\alpha\beta}=-DE_2{}^{\alpha\beta\gamma\delta}\left(\frac{1}{\lambda}c_{r\delta}c_{s\gamma}\,\mathrm{Im}\,\tilde T^{rs}-\frac{1}{2\hat G}\mathrm{Re}\,\tilde\Pi_{\gamma\delta}\right)+$$
$$+\frac{i\lambda}{\hat B(1-\mu_1{}^2)}c^{\alpha\gamma}c^{\beta\delta}P_{\delta lrs}\,\mathrm{Re}\,\tilde T^{rs}. \tag{8}$$

В дальнейшем, считая, что коэффициенты Пуассона всех слоев равны (это приводит к равенству $\mu_1=\mu_2=\mu$), найдем величину множителя λ из условия одноразмерности слагаемых в (8), т. е.

$$\frac{\hat D}{\lambda}=\frac{\lambda}{B(1-\mu^2)},$$

откуда

$$\lambda=\left(\frac{\hat{B}\hat{D}}{1-\mu^2}\right)^{1/2}. \tag{9}$$

В этом случае формула (8) примет вид

$$\tilde{M}^{\alpha\beta}=i\left(\frac{\hat{B}\hat{D}}{1-\mu^2}\right)^{1/2}(\tilde{T}_2-\mu\bar{\tilde{T}}_1)+\frac{\hat{D}}{2\hat{G}}E^{\alpha\beta\gamma\delta}\operatorname{Re}\tilde{\Pi}_{\gamma\delta}. \tag{10}$$

Подставляя (10) в (6), получим после ряда упрощений следующие уравнения в комплексных усилиях:

$$\begin{gathered}\nabla_\alpha\tilde{T}^{\alpha\beta}-b_\alpha{}^\beta\tilde{N}^\alpha+q^\beta=0,\\ \nabla_\alpha\tilde{N}^\alpha+b_{\alpha\beta}\tilde{T}^{\alpha\beta}+q=0,\\ \left(-\frac{\hat{B}\hat{D}}{1-\mu^2}\right)^{1/2}\{\nabla_\alpha a^{\alpha\beta}\tilde{T}+(1+\mu)q^\beta\}+\frac{\hat{D}}{2\hat{G}}\nabla_\alpha E^{\alpha\beta\gamma\delta}\operatorname{Re}\tilde{\Pi}_{\gamma\delta}-\tilde{N}^\beta=0,\end{gathered} \tag{11}$$

где $\tilde{T}=a^{\alpha\beta}\tilde{T}_{\alpha\beta}$ — основная комплексная функция В. В. Новожилова.

Полученные уравнения (11) могут быть положены в основу исследования напряженно-деформированного состояния слоистых трансверсально-изотропных оболочек.

Львовский филиал математической физики
Института математики
Академии наук УССР

Поступило
24 I 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *В. В. Новожилов,* Теория тонких оболочек, Л., 1951. [2] *Э. И. Григолюк, П. П. Чулков,* Изв. АН СССР, Мех. тверд. тела, 1 (1967). [3] *L. Librescu,* Rev. Mec. Appl., v. 5, 401 (1960). [4] *П. М. Огибалов, М. А. Колтунов,* Оболочки и пластины, М., 1969. [5] *С. П. Тимошенко,* Курс теории упругости, ч. 2, Петроград, 1916. [6] *Э. И. Григолюк,* Изв. АН СССР, ОТН, № 1, 77 (1957). [7] *Э. И. Григолюк, Б. Л. Пелех,* ДАН, т. 207, № 3 (1972). [8] *Б. Л. Пелех, Е. Н. Лунь,* ДАН, т. 192, 6 (1970). [9] *Б. Л. Пелех,* Механика полимеров, № 4 (1970).