Доклады Академии наук СССР
1974. Том 216, № 5

УДК 519.24 *МАТЕМАТИКА*

И. Г. ЖУРБЕНКО

О СТАРШИХ СПЕКТРАЛЬНЫХ ПЛОТНОСТЯХ ОДНОРОДНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПОЛЕЙ С ПЕРЕМЕШИВАНИЕМ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 20 XII 1973)

Эмпирическому спектральному анализу стационарных процессов и однородных, изотропных случайных полей посвящена многочисленная литература ([1-6]). Для получения статистических оценок спектральной плотности необходимы некоторые априорные свойства гладкости этих плотностей. Результаты работы ([5]) основаны на предположении дифференцируемости до порядка q включительно спектральной плотности гауссовского однородного, изотропного поля. В работах ([7, 8]) даются оценки сверху старших спектральных плотностей процессов, удовлетворяющих некоторым условиям перемешивания, а также доказываются некоторые свойства гладкости старших спектральных плотностей. В работе ([7]) оценки старших спектральных плотностей достигаются при степенном убывании зависимостей по Розенблатту. В работе ([8]) за счет использования условий перемешивания почти марковского типа получены более сильные оценки старших спектральных плотностей, в частности, из этих оценок вытекает разложимость характеристического функционала в ряд по старшим спектральным плотностям.

Настоящая работа посвящена получению оценок старших спектральных плотностей и их производных однородного случайного поля в предположении некоторых условий перемешивания случайного поля, аналогичных условиям Розенблатта для процессов. Такие условия вводились ранее в работе ([9]), в этой же работе была доказана осуществимость этих условий для широкого класса случайных полей.

Будем рассматривать однородное случайное поле $x(t)$, заданное при всех $t\in Z^m$, Z^m — целочисленная решетка эвклидова пространства R^m. Характеристический функционал

$$H(a)=Me^{i(a,x)},\qquad (a,x)=\sum_t a(t)\,x(t),$$

определим на множестве функций $a(t)$, отличных от нуля на конечном множестве точек $t\in Z^m$. Смешанные семиинварианты $S_n(t_1,\ldots,t_n)$ определяются как коэффициенты формального разложения

$$\ln H(a)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{i^n}{n!}\sum_{t_1,\ldots,t_n}S_n(t_1,\ldots,t_n)\,a(t_1)\ldots a(t_n),$$

где $S_n(t_1,\ldots,t_n)$ предполагаются симметричными функциями аргументов $t_1,\ldots,t_n$, суммирование производится по всем последовательностям точек $t_1,\ldots,t_n$, $t_i\in Z^m$.

Спектральные меры F_n на кубах Π^{nm}, определяемых неравенствами $-\pi\leqslant\omega_{kj}\leqslant\pi$, $1\leqslant k\leqslant n$, $1\leqslant j\leqslant m$, задаются своими коэффициентами Фурье

$$S_n(t_1,\ldots,t_n)=\int_{\Pi^{nm}}\exp\left\{i\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}t_{kj}\omega_{kj}\right\}F_n(d\bar\omega),$$

где $t_{k1}, \ldots, t_{km}$ суть координаты точки $t_k \in Z^m$, $\omega_{k1}, \ldots, \omega_{km}$ — координаты точки $\omega_k \in R^m$.

В случае однородного поля $x(t)$, $t \in Z^m$, семиинварианты $S_n(t_1, \ldots, t_n)$ инвариантны по сдвигам

$$S_n(t_1+\tau, \ldots, t_n+\tau) = S_n(t_1, \ldots, t_n), \quad \tau \in Z^m,$$

а спектральные меры F_n сосредоточены на многообразиях $\omega_1+\ldots+\omega_n = 2\pi\tau$, $\tau \in Z^m$, и их естественно записать в виде

$$F_n(M) = \int_M f_n(\omega_1, \ldots, \omega_n)\,\delta^*(\omega_1+\ldots+\omega_n)\,d\bar{\omega},$$

где $M \subset \Pi^{mn}$, а

$$\delta^*(\omega) = \sum_{\tau \in Z^m} \delta(\omega - 2\pi\tau),$$

$\delta(\omega)$, $\omega \in R^m$, — многомерная дельта-функция Дирака (определяется как произведение одномерных функций Дирака). Функции $f_n(\omega_1, \ldots, \omega_n)$, если они существуют, называются спектральными плотностями n-го порядка однородного поля $x(t)$. Заметим, что $f(\omega) = f_2(\omega, -\omega)$, как функция одного переменного $\omega \in R^m$, является обычной спектральной плотностью однородного поля $x(t)$.

Введем расстояние $r(t_1, t_2)$ между двумя точками t_1, t_2 согласно метрике эвклидова пространства R^m. Расстояние $r(t_1, \ldots, t_k; t_{k+1}, \ldots, t_n)$ между двумя множествами $(t_1, \ldots, t_k)$ и $(t_{k+1}, \ldots, t_n)$ вводится обычным образом:

$$r(t_1, \ldots, t_k; t_{k+1}, \ldots, t_n) = \min_{p \leqslant k < q} r(t_p, t_q).$$

Для произвольного набора точек $t_1, \ldots, t_n$ пространства R^m определим функцию

$$d(t_1, \ldots, t_n) = \max_{\substack{i_1 \ldots i_n \\ 1 \leqslant k < n}} r(t_{i_1}, \ldots, t_{i_k}; t_{i_{k+1}}, \ldots, t_{i_n}),$$

где максимум функции $r(t_{i_1}, \ldots, t_{i_k}; t_{i_{k+1}}, \ldots, t_{i_n})$ берется по всем перестановкам $i_1, \ldots, i_n$ индексов $1, \ldots, n$ и $1 \leqslant k < n$.

Введем коэффициент перемешивания

$$\alpha(t_1, \ldots, t_k; t_{k+1}, \ldots, t_n) = \sup_{\substack{A \in \mathfrak{A}_{t_1 \ldots t_k} \\ B \in \mathfrak{A}_{t_{k+1}, \ldots, t_n}}} |P(AB) - P(A)P(B)|,$$

где $\mathfrak{A}_{t_1, \ldots, t_k}$ — σ-алгебра событий, порожденная случайными величинами $x(t_1), \ldots, x(t_k)$. Будем предполагать, что случайное поле $x(t)$ удовлетворяет следующему условию перемешивания:

$$\alpha_n(r) = \sup_{\substack{r(t_1, \ldots, t_k,\ t_{k+1}, \ldots, t_n) = r \\ 1 \leqslant k < n}} \alpha(t_1, \ldots, t_k; t_{k+1}, \ldots, t_n) \xrightarrow[r \to \infty]{} 0. \tag{1}$$

Ниже приводятся теоремы, устанавливающие зависимость оценок смешанных семиинвариантов, старших спектральных плотностей и их производных от скорости убывания коэффициента перемешивания случайного поля $\alpha_n(r)$.

Теорема 1. *Пусть для случайного поля $x(t)$ выполнено условие слабой зависимости* (1) *и, кроме того, существуют все моменты до порядка νn включительно при некотором $\nu > 2$.*

Тогда для смешанных семиинвариантов $S_n(t_1, \ldots, t_n)$ случайного поля $x(t)$ выполняется оценка

$$|S_n(t_1, \ldots, t_n)| \leqslant n^{n+1} C^n (4+6C) \alpha_n^{\rho}(d(t_1, \ldots, t_n)),$$

где $\rho = 1 - 2/\nu$ *и*

$$C = \max_{p \leqslant \nu n} M |x(t)|^p.$$

Теорема 2. *Пусть существуют первые* νn, $\nu > 2$, *моментов случайных величин* $x(t)$, *пусть для однородного случайного поля* $x(t)$, $t \in Z^m$, *выполнено условие слабой зависимости* (1), *причем для* $\rho = 1 - 2/\nu$ *выполняется*

$$\sum_{r=1}^{\infty} r^{mn} \alpha_n^{\rho}(r) = K_n < \infty.$$

Тогда существует спектральная плотность n-го порядка случайного однородного поля $x(t)$, *для которой выполняется неравенство*

$$|f_n(\omega_1, \ldots, \omega_n)| \leqslant \left(\frac{m}{2}!\right)^n n^{2n} K_n (4+6C) C^n,$$

где постоянная C определена в условии теоремы 1.

Теорема 3. *Пусть для однородного случайного поля* $x(t)$, $t \in Z^m$, *существуют первые* νn, $\nu > 2$, *моментов и, кроме того, выполнено условие слабой зависимости* (1), *причем для* $\rho = 1 - 2/\nu$ *выполняется*

$$\sum_{r=1}^{\infty} r^{mn+q} \alpha_n^{\rho}(r) = K_{n,q} < \infty. \tag{2}$$

Тогда существуют все частные производные порядка q *спектральной плотности n-го порядка случайного однородного поля* $x(t)$, *для которых выполняется неравенство*

$$\left| \frac{\partial^q f_n(\omega_{11} \ldots \omega_{ij} \ldots \omega_{nm})}{\partial \omega_{11}^{k_{11}} \ldots \partial \omega_{ij}^{k_{ij}} \ldots \partial \omega_{nm}^{k_{nm}}} \right| \leqslant \left(\frac{m}{2}!\right)^n n^{2n+q} K_{n,q} (4+6C) C^n,$$

где постоянная C определена в теореме 1.

Замечание. Условие (2) теоремы 3 выполнено, если при некотором $\varepsilon > 0$ справедливо равенство

$$\alpha_n(r) = O(r^{-(mn+q+1+\varepsilon)/\rho}).$$

Теорема 4. *Пусть для однородного случайного поля* $x(t)$, $t \in Z^m$, *существуют первые* νn, $\nu > 2$, *моментов и, кроме того, выполняется условие* (1), *причем при некоторых* $b > 0$ *и* $K > 0$

$$\alpha_n(r) \leqslant K e^{-br}.$$

Тогда в области

$$|\operatorname{Im} \omega_{ij}| \leqslant {}^1/_2 b \rho (mn)^{-2}$$

переменных $\omega_{11}, \ldots, \omega_{nm}$ *функция* $f_n(\omega_{11}, \ldots, \omega_{nm})$ *аналитична вместе со всеми своими производными и для них при любых* n, m, q *выполняется* *оценка*

$$\left| \frac{\partial^q f_n(\omega_{11}\ldots\omega_{ij}\ldots\omega_{nm})}{\partial\omega_{11}^{k_{11}}\ldots\partial\omega_{ij}^{k_{ij}}\ldots\partial\omega_{nm}^{k_{nm}}} \right| \leqslant A\,(mn)^{3mn+2q}\left(\frac{2}{b\rho}\right)^{mn+q},$$

где

$$A=(4+6C)\left(1+\frac{2}{b\rho}\right)C^n K^\rho e^{q^2},$$

а постоянные C и ρ определены в теореме 1. Оценка для $f_n(\omega_1,\ldots,\omega_n)$ получается из последней при значении $q=0$.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
12 XII 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *D. R. Brillinger*, Biometrika, v. 56, 375 (1969). [2] *И. А. Ибрагимов*, Теория вероятн. и ее применения, т. 8, № 4, 391 (1963). [3] *Р. Бенткус*, Литовск. матем. сборн., т. 12. № 1, 55 (1972). [4] *В. Г. Алексеев*, Проблемы передачи информации, т. 7, № 4, 45 (1971). [5] *В. Г. Алексеев*, Теория вероятн. и ее применения, т. 18, № 2, 280 (1973). [6] *П. С. Кнопов*, Кибернетика, № 6, 59 (1965). [7] *Н. М. Зуев*, ДАН, т. 207, № 4, 773 (1972). [8] *И. Г. Журбенко*, Теория вероятн. и ее применения, т. 17, № 1, 150 (1972). [9] *Р. Л. Добрушин*, Теория вероятн. и ее применения, т. 15, № 3, 469 (1970).