Доклады Академии наук СССР
1974. Том 216, № 5

УДК 517.512.6

МАТЕМАТИКА

М. Я. ЗИНГЕР

ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ОЦЕНКИ ПРОИЗВОДНЫХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОГО ПОЛИНОМА, НОРМИРОВАННОГО НА ОТРЕЗКЕ, МЕНЬШЕМ ЧЕМ ПЕРИОД

(Представлено академиком В. И. Смирновым 4 XII 1973)

Пусть $\Gamma_n(\omega)$ — множество всех тригонометрических полиномов $\{\gamma_n(\theta)\}$ порядка не выше n, подчиненных условию $|\gamma_n(\theta)|\leqslant 1$ при $\theta\in[-\omega, \omega]$, $0<\omega<\pi$; и пусть k означает порядок производной.

Задача. Исследовать функцию

$$M(\zeta, \omega, n, k)=\sup_{\gamma_n\in\Gamma_n(\omega)} |\gamma_n^{(k)}(\zeta)| \tag{1}$$

с областью определения *

$$-\pi\leqslant\zeta<\pi;\quad 0<\omega<\pi;\quad n=2, 3, \ldots,\quad k=1, 2, \ldots$$

Пусть $\Phi_n(\omega)$ — множество всех полиномов $\{\varphi_n(\theta)\}$ с действительными коэффициентами из $\Gamma_n(\omega)$. Известно ([1]) (см. также ([2]), стр. 411), что для любых ζ, ω, n, k из области определения функции M существует полипом (полиномы) $\varphi_n(\theta)\in\Phi_n(\omega)$ — назовем его экстремальным,— на котором реализуется искомый supremum. Поэтому (1) эквивалентно следующему определению функции M:

$$M(\zeta, \omega, n, k)=\sup_{\varphi_n\in\Phi_n(\omega)} \varphi_n^{(k)}(\zeta) \tag{2}$$

(с той же областью определения); ниже, основываясь на равенстве (2), мы не выходим за пределы множества $\Phi_n(\omega)$.

Интересные результаты по этой задаче получены в работах И. И. Привалова ([3]), Д. Джексона ([4]), В. С. Виденского ([5]), Н. И. Черных ([6]) (некоторые результаты содержатся также в работе автора ([7])).

Теорема 1. *При фиксированных ω, n, k, из области определения функции $M(\zeta, \omega, n, k)$ (экстремальный полином для любого $\zeta\in[-\pi, \pi)$ единственный.*

Множество всех экстремальных полиномов для $-\pi\leqslant\zeta<\pi$ обозначим через $Y(\omega, n, k)$.

Теорема 2. *При любом натуральном k*

$$Y(\omega, n, 1)=Y(\omega, n, k).$$

В дальнейшем будем писать $Y(\omega, n)$ вместо $Y(\omega, n, k)$.

Теорема 3. *Множество $Y(\omega, n)$ состоит из полиномов*

$$\pm\tau_n(\theta)=\pm\cos 2n \arccos\frac{\sin {}^1/_2\theta}{\sin {}^1/_2\omega}$$

и множества $Z_n(\omega)$ всех полиномов, достигающих на $[-\omega, \omega]$ значений ±1 точно $2n$ раз с последовательным чередованием знаков.

---

* $n=1$ представляет исключительный случай и в заметке не затрагивается.

Введем следующие множества полиномов:

$$L_n^+(\omega)=\{l(\theta)\,|\,l(\theta)\in Z_n(\omega),\ l(-\omega)=1,\ |l(\omega)|<1\},\quad 0<\omega<\pi;$$
$$R_n^+(\omega)=\{r(\theta)\,|\,r(\theta)\in Z_n(\omega),\ r(\omega)=1,\ |r(-\omega)|<1\},\quad 0<\omega<\pi;$$
$$S_n^+(\omega)=\{s(\theta)\,|\,s(\theta)\in Z_n(\omega),\ s(-\omega)=1,\ s(\omega)=-1\},\quad 0<\omega<\pi-\pi/(2n);$$
$$S_n^+(\pi-\pi/(2n))=(-1)^n\sin n\theta;$$
$$Q_n^+(\omega)=\{q(\theta)\,|\,q(\theta)\in Z_n(\omega),\quad |q(\pm\omega)|<1,\ q(\sigma_1)=1\},$$
$$\pi<\pi/(2n)<\omega<\pi,$$

где σ_1 — ближайшая к $-\omega$ точка максимального уклонения полинома $q(\theta)$ на $[-\omega,\ \omega]$.

Пусть $L_n^\pm(\omega)$ (либо $R_n^\pm(\omega)$ и т. д.) означает объединение множеств полиномов $L_n^+(\omega)$ и $L_n^-(\omega)$, причем, если $L_n^+(\omega)=\{l(\theta)\}$, то $L_n^-(\omega)=\{-l(\theta)\}$.

Теорема 4.

$$Z_n(\omega)=L_n^\pm(\omega)\cup R_n^\pm(\omega)\cup S_n^\pm(\omega)$$

при $0<\omega\leqslant\pi-\pi/(2n)$;

$$Z_n(\omega)=L_n^\pm(\omega)\cup R_n^\pm(\omega)\cup Q_n^\pm(\omega)$$

при $\pi-\pi/(2n)<\omega<\pi$.

Замечание. Множество $Q_n^+(\omega)$ полиномов $\{q(\theta)\}$ выписывается явно:

$$Q_n^+(\omega)=\{\cos n(\theta+\vartheta)\},\qquad 2\pi-\omega-\pi/n<\vartheta<\omega.$$

Для конструктивного определения множества $L_n^+(\omega)$, (а также для формулировки последующих результатов) введем обозначения, касающиеся полинома $\tau_n(\theta)$:

$$\tau_n(\theta)=\sum_{p=0}^{n}a_p\cos p\theta;$$

$\{h_j\}_{j=0}^{2n}$ — значения на $[-\omega,\omega]$ *, в которых $|\tau_n(\theta)|=1$; $\{\psi_j\}_{j=1}^{2n}$ — нули полинома $\tau_n(\theta)$.

Полагая

$$l(\theta)=l(\theta,t)=\sum_{p=0}^{n}x_p(t)\cos p\theta+\sum_{p=1}^{n}y_p(t)\sin p\theta,$$

где t — непрерывный параметр, множество $L_n^+(\omega)=\{l(\theta)\}$ можно конструктивно определить следующей системой уравнений:

$$\begin{aligned}&l(-\omega,\ t)=1;\\&l(\sigma_j(t),\ t)=(-1)^j,\quad j=1,\ 2,\ldots,\ 2n-1;\\&(\partial l(\theta,t)/\partial\theta)_{\theta=\sigma_j(t)}=0,\quad j=1,\ 2,\ldots,\ 2n-1;\\&l(\lambda(t),\ t)=t;\\&(\partial l(\theta,t)/\partial\theta)_{\theta=\lambda(t)}=0\end{aligned}\qquad(3)$$

с неизвестными $\{\sigma_j(t)\}_{j=0}^{2n-1}$ (нули $\partial l(\theta,t)/\partial\theta$, расположенные на $(-\omega,\omega)$), $\lambda(t)$ (нуль $\partial l(\theta,\ t)/\partial\theta$, расположенный на $(-\pi,\ -\omega)$), $\{x_p(t)\}_{p=0}^{n}$, $\{y_p(t)\}_{p=1}^{n}$ и начальными условиями:

при $t=\tau_n(-\pi)$

$$\sigma_j(t_0)=h_j,\quad j=1,\ 2,\ldots,\ 2n-1;\quad \lambda(t_0)=-\pi;$$
$$x_p(t_0)=a_p,\quad p=0,1,\ldots,n;\quad y_p(t_0)=0,\quad p=1,\ 2,\ldots,\ n.$$

---

* Все значения на $[-\pi,\ \pi)$ нумеруются в возрастающем порядке.

Параметр t при $0<\omega<\pi-\pi/(2n)$ принимает значения в интервале $(c(\omega), \tau_n(-\pi))$, где $1<c(\omega)<\tau_n(-\pi)$, и определяется из равенства $\sigma_{2n-1}(c(\omega))=\omega$, а при $\pi-\pi/(2n)\leqslant\omega<\pi$ параметр t принимает значения в интервале $(1, \tau_n(-\pi))$.

Множества $R_n^+(\omega)$, $0<\omega<\pi$, и $S_n^+(\omega)$, $0<\omega<\pi-\pi/(2n)$, конструктивно определяются системами уравнений, аналогичными системе (3).

Следствие теорем 1—4. *Для произвольных n и k*

$$\min_{\zeta\in[-\pi,\,\pi)} M(\zeta, \omega, n, k)=n^k$$

при $\pi-\pi/(2n)\leqslant\omega<\pi$;

$$\min_{\zeta\in[-\pi,\,\pi)} M(\zeta, \omega, n, k)>n^k$$

при $0<\omega<\pi-\pi/(2n)$.

Теорема 5. *При фиксированном* $k\in\{1, 2, \ldots\}$ *и* $n\to\infty$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{M(\zeta,\omega,n,k)}{n^k}=\frac{\cos^k {}^1/_2\zeta}{(\sin^2 {}^1/_2\omega-\sin^2 {}^1/_2\zeta)^{k/2}},\quad -\omega<\zeta<\omega, \tag{4}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{M(\pm\omega,\omega,n,k)}{n^{2k}}=\frac{2^k\operatorname{ctg}^k {}^1/_2\omega}{1\cdot3\cdots(2k-1)}. \tag{5}$$

Равенство (4) является аналогом предельного равенства С. Н. Бернштейна для алгебраических полиномов [8]; равенство (5) является предельным аналогом равенства В. А. Маркова для алгебраических полиномов [9] (см. также [8]).

Теорема 6. *При произвольных* ζ, ω, n, k *из области определения* $M(\zeta, \omega, n, k)$ *имеет место следующая оценка сверху*:

$$M(\zeta,\omega,n,k)\leqslant\frac{1}{2n^2}\sum_{m=0}^{2n}\frac{1}{\lambda_m}\left|\left(\frac{(\cos\omega-\cos\theta)\operatorname{tg}\dfrac{\theta}{2}}{\cos h_m-\cos\theta}\tau_n'(\theta)\right)^{k}_{\theta=s}\right|+$$

$$+\frac{1}{2n}\sum_{m=1}^{2n}\frac{(\sin^2 {}^1/_2\omega-\sin^2 {}^1/_2\psi_m)^{1/2}}{\left|\cos\dfrac{\psi_m}{2}\right|}\left|\left(\frac{\sin\theta}{\cos\psi_m-\cos\theta}\tau_n(\theta)\right)^{(k)}_{\theta=\zeta}\right|, \tag{6}$$

$$\lambda_1=\lambda_2=\ldots=\lambda_{2n-1}=1;\qquad \lambda_0=\lambda_{2n}=2.$$

Следствие. *Из оценки* (6) *элементарно получается более грубая, но и более простая оценка для* $\zeta\in[-\pi, -\omega)\cup(\omega, \pi)$:

$$M(\zeta,\omega,n,k)<\frac{1}{n}\left|\left(\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\tau_n'(\theta)\right)^{(k)}_{\theta=\zeta}\right|+\left|\left(\frac{\sin\theta}{\cos\omega-\cos\theta}\tau_n(\theta)\right)^{(k)}_{\theta=\zeta}\right|. \tag{7}$$

Неравенства (6) и (7) можно использовать для исследования порядков роста $M(\zeta, \omega, n, k)$ по n и k. В частности, имеет место

Теорема 7. *При фиксированных* $\zeta\in[-\pi, \pi)$, $\omega\in(0, \pi)$, $n\in\{2, 3, \ldots\}$ *и при* $k\to\infty$

$$\varlimsup_{k\to\infty}\frac{M(\zeta,\omega,n,k)}{n^k}<\frac{|\cos n\zeta|+|\sin n\zeta|}{\sin^{2n} {}^1/_2\omega}$$

Для множества $E_\tau(\omega, n, k)$ точек $\{\zeta\}$ на $[-\pi, \pi)$, в которых экстремальными являются полиномы $\pm\tau_n(\theta)$, приведем более точные результаты.

Введем множества $J(\omega, n)$ и $J^*(\omega, n)$ следующим образом (ниже $1 \leqslant m < +\infty$, целое):

$$J(\omega, n) = \{\zeta \mid \exists m(\zeta) \text{ такое, что для } \forall m > m(\zeta) \ \zeta \in E_\tau(\omega, n, 2m+1)\};$$

$$J^*(\omega, n) = \{\zeta \mid \exists m(\zeta) \text{ такое, что для } \forall m > m(\zeta) \ \zeta \in E_\tau(\omega, n, 2m)\}.$$

Теорема 8.

$$\operatorname{mes} J(\omega, n) = \operatorname{mes} J^*(\omega, n) = \lim_{k \to \infty} \operatorname{mes} E_\tau(\omega, n, k) = 2(\pi - \omega).$$

Теорема 9. *При фиксированных* $\omega \in (0, \pi)$ *и* $n \in \{2, 3, \ldots\}$

$$\lim_{m \to \infty} \frac{M(\zeta, \omega, n, 2m+1)}{n^{2m+1}} = \frac{|\sin n\zeta|}{\sin^{2n} {}^1/_2\omega}, \quad \zeta \in J(\omega, n),$$

$$\lim_{m \to \infty} \frac{M(\zeta, \omega, n, 2m)}{n^{2m}} = \frac{|\cos n\zeta|}{\sin^{2n} {}^1/_2\omega}, \quad \zeta \in J^*(\omega, n).$$

Благодарю Н. А. Лебедева за внимание к моей работе.

Институт автоматики и процессов управления
с вычислительным центром
Дальневосточного научного центра
Академии наук СССР
Владивосток

Поступило
16 XI 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *С. Н. Бернштейн*, Leçons sur les proprietes extremales, Paris, 1926. [2] *В. С. Виденский*, Изв. АН СССР, сер. матем., т. 15, № 5, 401 (1951). [3] *И. И. Привалов*, Интеграл Коши, Саратов, 1919. [4] *D. Jackson*, Bull. Am. Math. Soc., v. 37, 883 (1931). [5] *В. С. Виденский*, ДАН, т. 130, № 1, 13 (1960). [6] *Н. И. Черных*, Тр. Математич. инст. АН СССР, т. 78, 48 (1965). [7] *М. Я. Зингер*, Изв. высших учебн. завед., Математика, № 6 (85), 62 (1969). [8] *С. Н. Бернштейн*, Собрание соч., т. 1, № 11, М., 1952, стр. 151. [9] *В. А. Марков*, О функциях, наименее уклоняющихся от нуля в данном промежутке, СПб., 1892.