Доклады Академии наук СССР
1974. Том 216, № 5

УДК 517.9+551.465 *ГИДРОМЕХАНИКА*

А. В. КАЖИХОВ

РАЗРЕШИМОСТЬ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ НЕОДНОРОДНОЙ ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

(Представлено академиком Г. И. Марчуком 12 XII 1973)

Движение неоднородной вязкой несжимаемой жидкости описывается системой уравнений Навье — Стокса [1]

$$\rho[\mathbf{v}_t+(\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v}]=\mu\Delta\mathbf{v}-\nabla p-2\rho[\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v}]+\rho\mathbf{f},\quad \operatorname{div}\mathbf{v}=0,$$
$$\rho_t+(\mathbf{v}\cdot\nabla)\rho=0, \tag{1}$$

где искомые функции $\mathbf{v}(x, t)=(v_1, v_2, v_3)$, $\nabla p(x, t)$ и $\rho(x, t)$ суть скорость, градиент давления и плотность жидкости соответственно, $\mu=\mathrm{const}>0$ — коэффициент динамической вязкости, $\boldsymbol{\omega}(x, t)$ — вектор угловой скорости вращения системы координат, $t\in[0, T]$ — время, $x=(x_1, x_2, x_3)$ — точка области течения Ω с дважды непрерывно дифференцируемой границей $\partial\Omega$.

В работе исследуется разрешимость следующей начально-краевой задачи для системы (1):

$$\mathbf{v}|_{t=0}=\mathbf{a}(x),\quad \rho|_{t=0}=\rho_0(x),\quad \mathbf{v}|_{S_T}=0,\quad S_T=\partial\Omega\times[0, T]. \tag{2}$$

В случае $\rho(x, t)\equiv\rho_0(x)\equiv\mathrm{const}$ эта задача достаточно полно изучена О. А. Ладыженской [2]. В данной заметке некоторые из результатов [2] обобщаются на случай неоднородной жидкости.

Определение 1. Слабым решением задачи (1), (2) называются функции $\mathbf{v}(x, t)$ и $\rho(x, t)$, удовлетворяющие условиям:

a) $\mathbf{v}(x, t)\in\overset{\circ}{V}_2(Q_T)\cap\overset{\circ}{J}(Q_T)$, $Q_T=\Omega\times[0, T]$ (определение пространств $\overset{\circ}{V}_2(Q_T)$ и $\overset{\circ}{J}(Q_T)$ см. в [2, 3]);

b) функция $\rho(x, t)$ ограниченная и положительная для почти всех $(x, t)\in Q_T$;

c) для всех гладких в Q_T функций $\boldsymbol{\Phi}(x, t)$ и $\varphi(x, t)$ таких, что $\operatorname{div}\boldsymbol{\Phi}=0$, $\boldsymbol{\Phi}|_{S_T}=\boldsymbol{\Phi}(x, T)=0$ и $\varphi(x, T)=0$, выполняются интегральные тождества

$$\int_0^T\int_\Omega\{\rho[(\mathbf{v}, \boldsymbol{\Phi}_t+(\mathbf{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{\Phi})+(\mathbf{f}-2[\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v}], \boldsymbol{\Phi})]-\mu(\mathbf{v}_{x_k}, \boldsymbol{\Phi}_{x_k})\}\,dx\,dt+$$
$$+\int_\Omega\rho_0(\mathbf{a}, \boldsymbol{\Phi}(x,0))\,dx=0, \tag{3}$$

$$\int_0^T\int_\Omega\rho[\varphi_t+(\mathbf{v}\cdot\nabla)\varphi]\,dx\,dt+\int_\Omega\rho_0(x)\varphi(x,0)\,dx=0. \tag{4}$$

Теорема 1. *Если* $\mathbf{f}(x, t)\in L_{2,1}(Q_T)$, $\boldsymbol{\omega}(x, t)\in L_{q,r}(Q_T)$, *где* $1/r+3/(2q)\leqslant1$, $r\in[1, \infty)$, $q\in({}^3/_2, \infty]$, $\mathbf{a}(x)\in\overset{\circ}{J}(\Omega)$ *и* $0<m\leqslant\rho_0(x)\leqslant M<\infty$, *то существует по крайней мере одно слабое решение задачи* (1), (2).

Доказательство теоремы 1 проводится методом Галеркина. Последовательность приближений $\mathbf{v}^n(x, t)$ и $\rho^n(x, t)$ находится следующим образом. $\mathbf{v}^n(x,t)$ строится в виде конечной суммы: $\mathbf{v}^n(x,t)=\sum_{j=1}^{n} c_{nj}(t)\,\mathbf{a}^j(x)$, где $\{\mathbf{a}^j(x)\}$ — базис в $(\mathring{\Omega})$, а $\rho^n(x,t)$ определяется как решение задачи

$$\rho_t^n+(\mathbf{v}^n\cdot\nabla)\rho^n=0,\quad \rho^n|_{t=0}=\rho_0^n(x); \tag{5}$$

здесь $\{\rho_0^n(x)\}$ — последовательность гладких функций, сходящаяся к $\rho_0(x)$ при $n\to\infty$ в нормах пространств $L_q(\Omega)$, $1\leqslant q<\infty$. Для вычисления коэффициентов $c_{nj}(t)$, $j=1, 2,\dots, n$, требуем, чтобы $\mathbf{v}^n(x, t)$ и $\rho^n(x, t)$ удовлетворяли тождеству (3) при всех функциях $\mathbf{\Phi}(x,t)$ вида $H(t)\,\mathbf{a}^j(x)$, $j=1, 2,\dots, n$, где $H(t)$ — произвольная гладкая на $[0, T]$ функция, равная нулю при $t=T$. Это требование приводит к задаче Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений относительно $c_{nj}(t)$:

$$\sum_{l=1}^{n}\alpha_{lj}^n\frac{dc_{nl}}{dt}+\sum_{i,l=1}^{n}\beta_{ilj}^n c_{ni}c_{nl}+\sum_{l=1}^{n}\gamma_{lj}^n c_{nl}=f_j^n, \tag{6}$$

$$c_{nj}(0)=c_j,\quad j=1, 2,\dots, n;$$

здесь

$$\alpha_{lj}^n(t)=\int_\Omega\rho^n(\mathbf{a}^l,\mathbf{a}^j)\,dx,\quad \beta_{ilj}^n(t)=\int_\Omega\rho^n((\mathbf{a}^i\cdot\nabla)\,\mathbf{a}^l,\mathbf{a}^j)\,dx,$$

$$\gamma_{lj}^n(t)=\int_\Omega[\mu(\mathbf{a}^l_{x_k},\mathbf{a}^j_{x_k})+2\rho^n([\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{a}^l],\mathbf{a}^j)]\,dx,\quad f_j^n(t)=\int_\Omega\rho^n(\mathbf{f},\mathbf{a}^j)\,dx.$$

Начальные значения $c_{nj}(0)$ взяты равными соответствующим коэффициентам разложения начальной функции $\mathbf{a}(x)$ по базису $\{\mathbf{a}^j(x)\}$:

$$c_j=\int_\Omega(\mathbf{a},\mathbf{a}^j)\,dx.$$

Далее для галеркинских приближений $\mathbf{v}^n(x, t)$ и $\rho^n(x, t)$ выводятся априорные оценки

$$\max_{0\leqslant t\leqslant T}\|\mathbf{v}^n\|_{2,\Omega}+\|\mathbf{v}_x^n\|_{2,Q_T}\leqslant C_1,\quad 0<m\leqslant\rho^n(x,\ t)\leqslant M<\infty, \tag{7}$$

с помощью которых на основе принципа неподвижной точки Шаудера доказывается разрешимость задачи (5), (6).

Константы C_1, m и M в (7) не зависят от номера n, поэтому можно выделить подпоследовательности $\{\mathbf{v}^{n_k}\}$ и $\{\rho^{n_k}\}$, $*$-слабо сходящиеся в $\mathring{V}_2(Q_T)\cap\mathring{J}(Q_T)$ и в $L_\infty(Q_T)$ соответственно.

Помимо оценок (7), устанавливаются следующие свойства приближений $\mathbf{v}^n(x,t)$ и $\rho^n(x,t)$. Во-первых, $\mathbf{v}^n(x,t)$ равностепенно непрерывны по t в норме $L_2(Q_T)$, а именно: имеет место оценка

$$\int_0^{T-\Delta t}\int_\Omega|\mathbf{v}^n(x,t+\Delta t)-\mathbf{v}^n(x,t)|^2dx\,dt\leqslant C_2(\Delta t)^{1/2} \tag{8}$$

для любого числа Δt, $0<\Delta t<T$, с постоянной $C_2>0$, не зависящей от n. Во-вторых, $*$-слабый предел $\rho(x, t)$ функций $\rho^{n_k}(x, t)$ сильно непрерывен по t в $L_q(\Omega)$, $1\leqslant q<\infty$, и для всех $t\in[0, T]$ удовлетворяет равенству

$$\|\rho(x,\ t)\|_{q,\Omega}=\|\rho_0(x)\|_{q,\Omega},\quad 1\leqslant q<\infty. \tag{9}$$

Из (7), (8) и (9) вытекает компактность $\{\mathbf{v}^{n_k}(x,\ t)\}$ в $L_2(Q_T)$ и $\{\rho^{n_k}(x, t)\}$ в $L_q(Q_T)$, $1\leqslant q<\infty$.

Предельным переходом при $k\to\infty$ в интегральных тождествах, которым удовлетворяют $\mathbf{v}^{n_k}$ и ρ^{n_k}, показывается, что предельные функции $\mathbf{v}(x,t)$ и $\rho(x,t)$ являются слабым решением задачи (1), (2).

Определение 2. Решением задачи (1), (2) называются функции $\mathbf{v}(x,t)$, $\nabla p(x,t)$ и $\rho(x,t)$, удовлетворяющие следующим условиям:

$$(\mathrm{I})\,\mathbf{v}(x,t)\in \mathring{W}_2^{2,1}(Q_T)\cap \mathring{J}(Q_T),\quad \nabla p\in L_2(Q_T),\quad 0<m\leqslant\rho(x,t)\leqslant M<\infty,$$

(II) эти функции удовлетворяют первым двум уравнениям системы (1) в сильном смысле, а третьему — в смысле интегрального тождества (4).

Рассмотрим сначала случай плоскопараллельного течения жидкости, когда $\mathbf{v}=(v_1,v_2,0)$, $x=(x_1,x_2)$. Справедлива

Теорема 2. *Если* $\mathbf{f}(x,t)\in L_2(Q_T)$, $\boldsymbol{\omega}(x,t)\in L_{q,2}(Q_T)$, $q>2$, $\mathbf{a}(x)\in \mathring{W}_2^1(\Omega)\cap\mathring{J}(\Omega)$ *и* $0<m<\rho_0(x)\leqslant M<\infty$, *то существует решение задачи* (1), (2) *в смысле определения* 2.

Доказательство теоремы 2 основывается на равномерной по n априорной оценке для галеркинских приближений $\mathbf{v}^n(x,t)$:

$$\max_{0\leqslant t\leqslant T}\|\mathbf{v}_x^n\|_{2,\Omega}+\|\mathbf{v}_t^n\|_{2,Q_T}+\|\mathbf{v}_{xx}^n\|_{2,Q_T}\leqslant C_3, \tag{10}$$

которая выводится путем умножения уравнений (6) на dc_{nj}/dt, суммирования по j от 1 до n и дальнейшего применения неравенства Гёльдера и оценок решения стационарной задачи для уравнений Навье — Стокса [2].

В общем случае трехмерной задачи близкими рассуждениями получен такой результат о разрешимости «в малом».

Теорема 3. *Пусть данные задачи удовлетворяют условиям*:

$$\mathbf{f}(x,t)\in L_2(Q_T),\quad \boldsymbol{\omega}(x,t)\in L_{3,2}(Q_T),\quad \mathbf{a}(x)\in\mathring{W}_2^1(\Omega)\cap\mathring{J}(\Omega),$$
$$0<m\leqslant\rho_0(x)\leqslant M<\infty$$

и выполнено одно из неравенств

$$\beta_1=1-\frac{MK_1(\Omega)}{\mu}\left[\|\mathbf{a}_x\|_{2,\Omega}+\left(\frac{M}{\mu}\right)^{1/2}\|\mathbf{f}\|_{2,Q_T}\right]\exp\left\{\frac{M}{\mu}\|\boldsymbol{\omega}\|^2_{3,2,Q_T}\right\}>0, \tag{11}$$

$$\beta_2=1-\frac{TM^3K_2(\Omega)}{\mu}\left[\|\mathbf{a}_x\|^2_{2,\Omega}+\frac{M}{\mu}\|\mathbf{f}\|^2_{2,Q_T}\right]^2\exp\left\{64\frac{M}{\mu}\|\boldsymbol{\omega}\|^2_{3,2,Q_T}\right\}>0, \tag{12}$$

где $K_1(\Omega)$ *и* $K_2(\Omega)$ — *постоянные, зависящие лишь от области* Ω.

Тогда существует решение задачи (1), (2) *в смысле определения* 2.

Замечание 1. Предположение относительно гладкости границы $\partial\Omega$ при доказательстве теоремы 1 можно ослабить, потребовав лишь кусочную непрерывную дифференцируемость $\partial\Omega$.

Замечание 2. При доказательстве теорем 2 и 3 в качестве базиса в пространстве $\mathring{J}(\Omega)$ берется базис из собственных функций оператора линейной стационарной задачи для уравнений Навье — Стокса (см. [2]).

В заключение пользуюсь случаем выразить искреннюю благодарность акад. Г. И. Марчуку и В. Н. Монахову за полезное обсуждение данной работы.

Институт гидродинамики
Сибирского отделения Академии наук СССР
Новосибирск

Поступило
23 IV 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *Л. И. Седов*, Механика сплошной среды, т. 1, «Наука», 1970. [2] *О. А. Ладыженская*, Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости, «Наука», 1970. [3] *О. А. Ладыженская, В. А. Солонников, Н. Н. Уральцева*, Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа, «Наука», 1967.