Доклады Академии наук СССР
1974. Том 216, № 5

УДК 519.217

МАТЕМАТИКА

Ю. И. КИФЕР

О ПРЕДЕЛЬНОМ ПОВЕДЕНИИ ИНВАРИАНТНЫХ МЕР МАЛЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ НЕКОТОРЫХ ГЛАДКИХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 6 XII 1973)

1. Пусть M — связное компактное n-мерное риманово многообразие класса C^3, T — диффеоморфизм M класса C^2, удовлетворяющий аксиоме А (см. [1]), S^t — поток класса C^2, также удовлетворяющий аксиоме А и L — невырожденный эллиптический дифференциальный оператор на M с гладкими коэффициентами. Оператор L порождает на M диффузионный процесс, переходную плотность которого обозначим через $q(t, x, y)$. Рассмотрим на M цепь Маркова x_n^ε с переходной плотностью $p^\varepsilon(x, y)=q(\varepsilon^2, Tx, y)$. При каждом $\varepsilon>0$ $p^\varepsilon(x, y)>0$, поэтому (см. [2]) существует единственная нормированная инвариантная мера σ^ε процесса x_n^ε. Мы изучаем множество $\mathfrak{M}_0$ предельных точек в смысле слабой сходимости мер $\{\sigma^\varepsilon\}$ при $\varepsilon\to 0$.

Рассмотрим теперь дифференциальный оператор

$$L_\varepsilon'=\varepsilon^2L+B, \tag{1}$$

где B — векторное поле потока S^t, т. е. $B(x)=d(S^tx)/dt|_{t=0}$. Оператор L_ε' порождает диффузионный процесс y_t^ε с переходной плотностью $r_\varepsilon(t, x, y)>0$. Так же как и выше, существует единственная нормированная инвариантная мера ν^ε процесса y_t^ε. В этом случае мы также изучаем множество $\mathfrak{M}_0'$ предельных точек мер ν^ε при $\varepsilon\to 0$. С точки зрения теории дифференциальных уравнений изучается задача, связанная с уравнением, имеющим малый параметр при старших производных.

Проблема исследования сходимости при $\varepsilon\to 0$ инвариантных мер малых случайных возмущений динамических систем была поставлена А. Н. Колмогоровым. В рассматриваемый нами класс динамических систем входят как полярные случаи системы Морса — Смейла [1], для которых наши результаты не дают ничего нового по сравнению с [5] и [6], и У-системы [3], для которых теоремы 1 и 2 дают полное решение проблемы, тогда как методы [5] и [6] в этом случае неприменимы.

2. Пусть Ω — множество неблуждающих точек для T [1] и $\Lambda\subset\Omega$ — аттрактор (см. [1]) такой, что любой аттрактор, содержащийся в Ω, содержится и в Λ. Нетрудно понять, что любое базисное множество Ω_α (см. [1]) либо содержится в Λ, либо не пересекается с Λ. Обозначим через $\Omega_{\alpha\beta}$, $\beta=1, \ldots, N_\alpha$, связные компоненты $\Omega_\alpha\subset\Lambda$. Пусть нормированная мера γ с носителем в достаточно малой окрестности множества $\Omega_{\alpha\beta}$ имеет непрерывную плотность относительно риманова объема. Положим $\gamma_k(\Gamma)=\gamma(T^{-kN_\alpha}\Gamma)$. В работе [4] показано, что γ_k имеет слабый предел $\mu_{\alpha\beta}$ при $k\to\infty$. Положим

$$\mu_\alpha=\frac{1}{N_\alpha}\sum_{\beta=1}^{N_\alpha}\mu_{\alpha\beta}.$$

Теорема 1. *Если* $\sigma\in\mathfrak{M}_0$, *то*:

а) $\sigma(\Lambda)=1$,

б) $\sigma|_{\Omega_\alpha}=\sigma(\Omega_\alpha)\mu_\alpha$ (*т. е. ограничение* σ *на* Ω_α *пропорционально* μ_α).

Нахождение величин $\sigma(\Omega_\alpha)$ для разных α связано с методами работ ([5], [6]). В «типичных» случаях существует единственное α такое, что $\sigma(\Omega_\alpha)=1$ и $\sigma(\Omega_\beta)=0$, если $\beta\neq\alpha$.

В случае, когда T — транзитивный $У$-диффеоморфизм ([3]), $\Omega_\alpha=\Omega_{\alpha\beta}=M$, поэтому $\sigma(\Omega_\alpha)=1$ и, следовательно, $\mathfrak{M}_0$ состоит из единственной меры, которую в соответствии с ([3]) обозначим $\mu^{(p)}$. Если T имеет гладкую инвариантную меру μ, то $\mu^{(p)}=\mu$.

В случае, когда S^t — поток, удовлетворяющий аксиоме А, можно доказать теорему, аналогичную теореме 1, если существует мера μ_α' со свойствами, аналогичными свойствам меры μ_α, построенной для диффеоморфизма *. Если S^t — транзитивный $У$-поток, то такая мера существует. Она построена в ([3]) и определяется следующим свойством: если γ — мера на M, имеющая непрерывную плотность по риманову объему и $\gamma_t(\Gamma)=\gamma(S^{-t}\Gamma)$, то γ_t при $t\to\infty$ слабо сходится к $\mu^{(p)}$.

Теорема 2. *В случае транзитивного У-потока ν^ε слабо сходится к $\mu^{(p)}$.*

Возможность другого подхода к теореме 2, основанного на общей теории гиббсовских мер, была указана в ([3]). Как сообщил мне автор работы ([3]), его доказательство теоремы 9 из ([3]) относилось только к геодезическим потокам на двумерных поверхностях отрицательной кривизны. Кроме того, в § 5 из ([3]) вместо меры $\mu^{(c)}$ должна фигурировать мера $\mu^{(p)}$.

3. Пусть Φ^t — поток реперов (см. ([7])) на компактном многообразии отрицательной кривизны W. Динамическая система Φ^t сохраняет естественную гладкую меру η, порожденную римановой метрикой. Предположим, что фазовым пространством потока Φ^t является многообразие M. Построение малого случайного возмущения потока S^t дословно переносится на случай Φ^t, только векторное поле B следует заменить на $\tilde{B}(x)=d(\Phi^t x)/dt|_{t=0}$. Обозначим инвариантную меру полученного диффузионного процесса через η^ε.

Теорема 3. *Предположим, что поток Φ^t эргодичный; тогда*

$$\eta^\varepsilon \xrightarrow[\text{слабо}]{} \eta.$$

Как показано в ([7]), достаточным условием эргодичности потока Φ^t является малое отличие метрики многообразия W от метрики постоянной отрицательной кривизны. Отметим, что $У$-системы и потоки реперов на многообразиях отрицательной кривизны составляют класс известных в настоящее время примеров гладких K-систем.

4. В оставшейся части заметки мы наметим доказательство теоремы 1. Теоремы 2 и 3 устанавливаются близкими методами.

Пункт а) теоремы 1 доказать легко, поэтому мы остановимся на б). Если $x\in\Omega$, то через $W^u(x)$ ($W^s(x)$) будем обозначать неустойчивое (устойчивое) многообразие точки x (см. ([1])). $W_\delta{}^u(x)$ ($W_\delta{}^s(x)$) — шар с центром в x радиуса δ в метрике на $W^u(x)$ ($W^s(x)$). Введем $n(\varepsilon)=[\varepsilon^{-\alpha_1}]$, $\alpha_1>0$, и $\delta(\varepsilon)=\varepsilon^{1-\alpha_2}$, $1>\alpha_2>0$, где $[\cdot]$ означает целую часть, причем $2\alpha_2>\alpha_1$. Для любого множества $A\subset\Omega$ положим $W_\delta{}^s(A)=\bigcup\limits_{x\in A} W_\delta{}^s(x)$. Можно показать, что основную роль играет изучение точек из множества $W^s_{\delta(\varepsilon)}(\Omega)$. Пусть $\gamma>0$ достаточно велико, но фиксировано, $\gamma(\varepsilon)=\gamma\cdot\delta(\varepsilon)$, $D_{\gamma(\varepsilon)}(x)=W^s_{\gamma(\varepsilon)}(W^u_{\gamma(\varepsilon)}(x))$.

Лемма 1. *Пусть $\{x_k{}^\varepsilon(\omega)\}$, $k=1,\ldots,n(\varepsilon)$, — траектория процесса $x_n{}^\varepsilon$, причем $x_1=x_1{}^\varepsilon(\omega)\in W^s_{\delta(\varepsilon)}(\Omega_\alpha)$, $\Omega_\alpha\subset\Lambda$.*

Тогда либо существует $z\in\Omega_\alpha$ такое, что $x_k{}^\varepsilon(\omega)\in D_{\gamma(\varepsilon)}(T^k z)$ при $k=1,\ldots,n(\varepsilon)$, либо найдется такое k, что $1\leqslant k<k+1\leqslant n(\varepsilon)$ и

$$\rho(Tx_k{}^\varepsilon(\omega), x^\varepsilon_{k+1}(\omega))\geqslant\delta(\varepsilon), \tag{2}$$

где $\rho(x, y)$ — риманово расстояние от x до y.

* Недавно Боуэн и Рюэль построили меру с необходимыми свойствами.

Из этой леммы следует, что в выражении для $p^{\varepsilon}(n(\varepsilon), x, y)$ — переходной плотности за $n(\varepsilon)$ шагов, в формуле Колмогорова — Чэпмена следует интегрировать по $\gamma(\varepsilon)$-окрестностям траекторий динамической системы, так как траектории процесса x_n^{ε}, для которых существует k такое, что справедливо (2), имеют малую меру. Далее можно показать, что в $\gamma(\varepsilon)$-окрестности точки x можно заменить T на дифференциал T в точке x и оператор L можно считать оператором с постоянными коэффициентами в $\gamma(\varepsilon)$-окрестности точки x.

Положим

$$R(z, x, y) = \\ = \int\limits_{D_{\gamma(\varepsilon)}(\xi_1)} \dots \int\limits_{D_{\gamma(\varepsilon)}(\xi_{n(\varepsilon)-1})} p^{\varepsilon}(x, w_1) \dots p^{\varepsilon}(w_{n(\varepsilon)-1}, y)\, m(dw_1) \dots m(dw_{n(\varepsilon)-1}),$$

где $\xi_i = T^{-n(\varepsilon)+i} z$ и $m(dw)$ — элемент риманова объема на M. В силу сделанных выше замечаний $R(z, x, y)$ можно оценить через некоторую гауссовскую плотность. Точные оценки приводятся ниже в лемме 2.

Пусть $x \in \Lambda$ и $\tilde{m}$, $\tilde{m}_1$ суть меры, индуцированные римановым объемом на $W^u(x)$ и $W^u(Tx)$. Положим

$$\lambda(Tx) = \frac{d(T\tilde{m})}{d\tilde{m}_1}(Tx).$$

Обозначим

$$M_{k,l}(x) = \{y:\ y \in W^s_{k\varepsilon}(z(y)),\ z(y) \in T^{n(\varepsilon)} W^u_{l\varepsilon}(x)\},$$

$$M_{0,l}(x) = M_{k,0}(x) = \varnothing, \quad Q_{n(\varepsilon)}(z) = \prod_{k=0}^{n(\varepsilon)-1} \lambda^{-1}(T^{-k} z).$$

Пусть $x, y \in W^s_{\delta(\varepsilon)}(\Omega_\alpha)$ и $\tilde{x}, \tilde{y} \in \Omega_\alpha$, причем $x \in W^s_{\delta(\varepsilon)}(\tilde{x})$, $y \in W_{\delta(\varepsilon)}(\tilde{y})$.

Лемма 2. *Если* $y \in M_{k,l}(\tilde{x}) \setminus (M_{k-1,l}(\tilde{x}) \cup M_{k,l-1}(\tilde{x}))$ *и* $k\varepsilon < \gamma(\varepsilon)$, $l\varepsilon < \gamma(\varepsilon)$, *то*

$$C^{-1} \varepsilon^{-n} \exp[-\alpha^{-1}(k^2 + l^2)] \leqslant \frac{R(z(y), x, y)}{Q_{n(\varepsilon)}(z(y))} \leqslant C \varepsilon^{-n} \exp[-\alpha(k^2 + l^2)]$$

для некоторых $c > 0$, $\alpha > 0$.

Эта лемма играет ключевую роль в доказательстве. Из нее уже можно вывести, что если $\sigma(\Omega_\alpha) \neq 0$ и $\sigma \in \mathfrak{M}_0$, то $\sigma|_{\Omega_\alpha}$ эквивалентна μ_α. В силу [8] σ — инвариантная мера, а из [4] следует, что T эргодичен на Ω_α, отсюда вытекает утверждение б) теоремы 1.

Теоремы 2 и 3 доказываются сходными методами, некоторое отличие лишь состоит в формулировке и доказательстве леммы, аналогичной лемме 1.

В заключение автор считает своим приятным долгом поблагодарить Я. Г. Синая за постановку задач и полезные консультации.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
5 XII 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *С. Смейл*, УМН, т. 25, № 1, 113 (1970). [2] *Дж. Л. Дуб*, Вероятностные процессы, ИЛ, 1956. [3] *Я. Г. Синай*, УМН, т. 27, № 4, 21 (1972). [4] *D. Ruelle*, A Measure Associated with Axiom — A Attractors, Preprint. [5] *А. Д. Вентцель, М. И. Фрейдлин*, УМН, т. 25, № 1, 3 (1970). [6] *Ю. И. Кифер*, УМН, т. 29, № 4 (1974). [7] *М. И. Брин, Я. Б. Песин*, УМН, т. 28, № 4, 209 (1973). [8] *Р. З. Хасьминский*, Теор. вероятн. и ее применения, т. 8, № 1, 3 (1963).