Доклады Академии наук СССР
1974. Том 215, № 6

УДК 519.3:539.3

МЕХАНИКА

В. Л. БЕРДИЧЕВСКИЙ

ОБ ОДНОМ ВАРИАЦИОННОМ ПРИНЦИПЕ

(Представлено академиком Л. И. Седовым 20 IX 1973)

Исследование задачи о минимуме функционала $I(u)$ на некотором множестве M облегчается, если известен функционал $J(p)$, определенный на некотором множестве N и такой, что

$$\sup_{p\in N} J(p) = \inf_{u\in M} I(u).$$

Функционал $J(p)$ привлекается, например, для построения оценок погрешности приближенного решения [1].

Особенно эффективно использование функционала $J(p)$ в тех случаях, когда ищется не минимизирующий элемент, а минимальное значение I_0 функционала $I(u)$. Вычисление значений $I(u)$ и $J(p)$ на любых элементах $u\in M$ и $p\in N$ дает оценку I_0 сверху и снизу

$$J(p)\leqslant I_0 \leqslant I(u).$$

Если для некоторого u можно подобрать p так, чтобы $I(u)$ и $J(p)$ были близки, то $I_0\approx I(u)$, причем ошибка не превышает $I(u)-J(p)$.

В работе указан способ построения функционала $J(p)$ по функционалу $I(u)$ вида

$$I=E(u^\alpha)-l(u^\alpha), \tag{1}$$

$$E(u^\alpha)=\int_V U(x^i, u^\alpha, \partial u^\alpha/\partial x^i)\,dx, \quad dx=dx^1\dots dx^n, \tag{2}$$

$$l(u^\alpha)=\int_V F_\alpha u^\alpha\,dx+\int_S f_\alpha u^\alpha d\sigma; \tag{3}$$

здесь V — некоторая область в n-мерном пространстве переменных x^i, $u^\alpha(x^i)$ — дифференцируемые функции x^i, латинские индексы пробегают значения $1,\dots,n$, греческие — $1,\dots,m$, функция U выпукла и дифференцируема по переменным u^α и $\partial u^\alpha/\partial x^i$, F_α — заданные в V функции x^i, гиперповерхность S — часть границы ∂V области V, f_α — функции, заданные на S, $d\sigma$ — элемент поверхности S.

Минимум функционала I ищется на функциях u^α, принимающих на поверхности $\Sigma=\partial V-S$ заданные значения

$$u^\alpha=\varphi^\alpha \text{ на } \Sigma. \tag{4}$$

В случаях, когда E — функционал Дирихле или функционал геометрически линейной теории упругости, сформулированный ниже вариационный принцип переходит соответственно в принцип Томпсона и принцип Кастильяно.

Рассмотрим пространство H_u функций $\{u^\alpha(x^i), u_i^\alpha(x^k)\}$ (u_i^α — $m\times n$ независимых функций x^k) и определенный в H_u функционал E,

$$E=\int_V U(x^i, u^\alpha, u_i^\alpha)\,dx.$$

На множестве $L \subset H_u$, состоящем из элементов вида $\{u^\alpha, \partial u^\alpha/\partial x^i\}$, функционал E совпадает с функционалом $E(u^\alpha)$ (2).

Введем пространство H_p функций $\{p_\alpha(x^k), p_\alpha{}^i(x_k)\}$ и обозначим через $\langle p\cdot u\rangle$ билинейную форму

$$\langle p\cdot u\rangle = \int\limits_V (p_\alpha u^\alpha + p_\alpha{}^i u_i{}^\alpha)\, dx.$$

На пространстве H_p определен функционал

$$E^*(p) = \sup_{H_u} (\langle p\cdot u\rangle - E), \tag{5}$$

представляющий преобразование Юнга функционала E ([2]).

Построим также на пространстве H_p линейный функционал $l^*(p)$ по формуле

$$l^*(p) = \langle p\cdot u_\Sigma{}^\alpha\rangle - l(u_\Sigma{}^\alpha),$$

где $\langle p\cdot u^\alpha\rangle$ — значение билинейной формы $\langle p\cdot u\rangle$ на множестве L,

$$\langle p\cdot u^\alpha\rangle = \int\limits_V (p_\alpha u^\alpha + p_\alpha{}^i \partial u^\alpha/\partial x^i)\, dx,$$

$u_\Sigma{}^\alpha$ — какие-нибудь функции, принимающие на Σ значения (4).

Обозначим через N множество в пространстве H_p, выделяемое ограничениями

$$\langle p\cdot u'^\alpha\rangle - l(u'^\alpha) = 0, \tag{6}$$

где u'^α — произвольные функции, принимающие на Σ нулевые значения.

Очевидно, что значения линейного функционала $l^*(p)$ на множестве N не зависят от конкретного выбора функций $u_\Sigma{}^\alpha$.

Рассмотрим задачу о максимуме на множестве N функционала

$$J(p) = l^*(p) - E^*(p). \tag{7}$$

Будем считать выполненными ограничения на U, F_α, f_α, φ_α и область V, при которых решения вариационных задач (1)—(4) и (6), (7) существуют и единственны (см. ([3–6])).

Для доказательства совпадения максимального значения J_0 функционала J и минимального значения I_0 функционала I,

$$I_0 = J_0, \tag{8}$$

потребуются следующие утверждения.

1°. Пусть u_0 — некоторый фиксированный элемент пространства H_u, а p_0 — максимизирующий элемент функционала

$$\langle p\cdot u_0\rangle - E^*(p). \tag{9}$$

Тогда максимизирующий элемент функционала

$$\langle p_0\cdot u\rangle - E \tag{10}$$

на пространстве H_u есть u_0.

2°. Положим $u_0 = \{u_0{}^\alpha, \partial u_0{}^\alpha/\partial x^i\}$, $u_0{}^\alpha$ — минимизирующий элемент функционала I (1). Тогда соответствующий элемент p_0 удовлетворяет ограничениям (6).

Действительно, дифференцируя (10) по направлению u в точке u_0 и полагая $u = \{u'^\alpha, \partial u'^\alpha/\partial x^i\}$, получим

$$\langle p_0\cdot u'^\alpha\rangle - DE(u_0{}^\alpha, u'^\alpha) = 0,$$

где $DE(u_0{}^\alpha, u'^\alpha)$ — производная функционала $E(u^\alpha)$ в точке $u_0{}^\alpha$ по направлению u'^α. Используя уравнения Эйлера функционала (1)

$$DE(u_0{}^\alpha, u'^\alpha) - l(u'^\alpha) = 0,$$

получим $\langle p_0\cdot u'^\alpha\rangle - l(u'^\alpha) = 0$, 3°. Справедливо равенство [2] $E(u_0^\alpha)+E^*(p_0)=\langle p_0\cdot u_0^\alpha\rangle$.

4°. Дифференцируя функционал (9) в точке p_0 по направлению p', получим

$$\langle p'\cdot u_0^\alpha\rangle-DE^*(p_0,\ p')=0. \qquad (11)$$

5°. Элемент p_0 является максимизирующим элементом функционала J. Действительно, согласно 2°, $p_0\in N$. Пусть, далее, p — произвольный элемент из N. Тогда p можно представить в виде $p=p_0+p'$, где

$$\langle p'\cdot u'^\alpha\rangle=0. \qquad (12)$$

Покажем, что $J(p)\leqslant J(p_0)$.

$$J(p)\leqslant J(p_0)+DJ(p_0,\ p')=J(p_0)+\langle p'\cdot u_\Sigma^\alpha\rangle-DE^*(p_0,\ p').$$

Используя (11) и (12), получим

$$J(p)\leqslant J(p_0)+\langle p'\cdot u_\Sigma^\alpha\rangle-\langle p'\cdot u_0^\alpha\rangle=J(p_0)+\langle p'\cdot u'^\alpha\rangle=J(p_0).$$

Следовательно, p_0 — максимизирующий элемент функционала $J(p)$.

Из 1°—5° вытекает равенство (8):

$$J_0=l^*(p_0)-E^*(p_0)=\langle p_0\cdot u_\Sigma^\alpha\rangle-l(u_\Sigma^\alpha)-\langle p_0\cdot u_0^\alpha\rangle+$$
$$+E(u_0^\alpha)=I_0+\langle p_0\cdot u'^\alpha\rangle-l(u'^\alpha)=I_0.$$

Замечание. 1. Определим функционал

$$L(p,\ u)=\langle p\cdot u^\alpha\rangle-E^*(p)-l(u^\alpha).$$

Очевидны равенства

$$\inf_u \sup_H L(p,\ u)=\inf_{u^\alpha} I=I_0, \qquad (13)$$

$$\sup_{Hp} \inf_{u^\alpha} L(p,\ u)=\sup_{p\in N} J=J_0; \qquad (14)$$

здесь inf вычисляется по всем u^α, удовлетворяющим ограничениям (4).

Таким образом, минимаксная задача (13) эквивалентна задаче о минимуме функционала I, а двойственная ей [7] минимаксная задача (14) — задаче о максимуме функционала J.

Замечание 2. Если функции p_α^i непрерывны и дифференцируемы в замкнутой области V, то ограничения (6) можно переписать в виде

$$\partial p_\alpha^i/\partial x^i-p_\alpha+F_\alpha=0, \qquad p_\alpha^i\cdot n_i|_S=f_\alpha; \qquad (15)$$

здесь n_i — компоненты вектора внешней нормали к S.

Замечание 3. Если функция U не зависит от u^α, то $E^*(p)=+\infty$ при $p_\alpha\neq 0$. Поэтому при отыскании максимума J следует положить $p_\alpha=0$. Функционал $E^*(p)$ при $p_\alpha=0$ есть преобразование Юнга функционала E по переменным u_i^α.

Пример 1. Принцип Томпсона. Пусть область V есть внешность некоторой ограниченной области Ω в трехмерном пространстве, $E(u)$ — функционал Дирихле,

$$E(u)={}^1/_2\int_V \frac{\partial u}{\partial x^i}\frac{\partial u}{\partial x^i}\,dx.$$

Рассмотрим задачу о минимуме функционала $I=E(u)$ при условии

$$u=1 \text{ на } \partial V=\partial\Omega,\quad u(\infty)\sim c_1/r+c_2/r^2+\ldots,\quad r^2=x_ix^i. \qquad (16)$$

Величина $(2\pi)^{-1}I_0$ имеет смысл электростатической емкости области Ω. Известно [8], что

$$I_0=\sup_{p^i}\left(\int_{\partial V} p_in^i\,d\sigma\right)^2\Big/\,2\int_V p_ip^i\,dx, \qquad (17)$$

где sup вычисляется по всем векторным полям p^i, удовлетворяющим уравнению

$$\partial p^i/\partial x^i=0. \qquad (18)$$

Вариационная задача (17), (18) носит название принципа Томпсона.

Покажем, что принцип Томпсона вытекает из (7), (8). В рассматриваемом случае $S=0$, $l(u)=0$, $\Sigma=\partial V$. Согласно замечанию 3, достаточно рассматривать векторные поля p^i, удовлетворяющие (18), при этом

$$E^*(p)={}^1/_2\int_V p_i p^i\,dx.$$

Выбирая какую-нибудь функцию u_Σ, принимающую краевые значения (16), получим

$$l^*(p)=\int_{\partial V} p^i n_i\,d\sigma.$$

Равенства (7), (8) можно переписать в форме

$$I_0=\sup_{p^i}\left(\int_{\partial V} p^i n_i\,d\sigma-{}^1/_2\int_V p_i p^i\,dx\right), \tag{19}$$

где sup берется по векторным полям p^i, удовлетворяющим (18).

Представим p^i в форме $p^i=\lambda p'^i$, $\partial p'^i/\partial x^i=0$, где λ — произвольное число, и перепишем (19) следующим образом:

$$I_0=\sup_{p'^i}\sup_{\lambda}\left(\lambda\int_{\partial V} p'^i n_i\,d\sigma-\lambda^2\cdot{}^1/_2\int_V p_i' p'^i\,dx\right). \tag{20}$$

После вычисления $\sup\limits_{\lambda}$ (20) примет форму принципа Томпсона.

Пример 2. Принцип Кастильяно. Рассмотрим функционалы геометрически линейной теории упругости ($m=n=3$, поэтому дальше употребляются только латинские индексы)

$$E=\int_V U(x^i,\varepsilon_{ij})\,dx,\quad \varepsilon_{ij}={}^1/_2(\partial u_i/\partial x^j+\partial u_j/\partial x^i).$$

Согласно замечанию 3, достаточно искать максимум функционала J на пространстве функций p^{ij}, а E^* считать преобразованием Юнга функционала E по переменным u_{ij}. Однако, так как E зависит только от симметричной части ε_{ij} тензора u_{ij}, $E^*=+\infty$ при $p^{ij}\neq p^{ji}$. Следовательно, при отыскании максимума J следует положить $p^{ij}=p^{ji}$. При этом функционал E^* будет совпадать с преобразованием Юнга функционала E по переменным ε_{ij}.

Если функции p^{ij} непрерывны и дифференцируемы в замкнутой области V, то выражение для J и ограничения (6) можно переписать в виде

$$J=\int_\Sigma p^{ij}n_j\varphi_i\,d\sigma-\int_V U^*(x^i,p^{ij})\,dx, \tag{21}$$

$$\partial p^{ij}/\partial x^j+F^i=0 \quad \text{в} \quad V, \qquad p^{ij}n_j=f^i \quad \text{на} \quad S; \tag{22}$$

здесь $U^*(x^i, p^{ij})$ — преобразование Юнга функции $U(x^i, \varepsilon_{ij})$ по переменным ε_{ij}. Вариационный принцип (21), (22) известен как принцип Кастильяно [9].

Замечание 4. Обычная формулировка этого принципа (21), (22) значительно уже формулировки (6), (7), так как предполагает непрерывность и дифференцируемость функций p^{ij}. В действительности максимум J можно рассматривать на любых суммируемых функциях p^{ij} (их значения на множествах меры нуль, в частности на S и Σ, не определены).

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
31 VII 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *D. Morgenstern*, Arch. Rat. Mech. and Anal., v. 4, 145 (1959). [2] *А. Д. Иоффе, В. М. Тихомиров*, УМН, т. 23, 6 (144), 1968. [3] *П. П. Мосолов, В. П. Мясников*, Вариационные методы в теории течений жестко-вязко-пластических сред. М., 1971. [4] *П. П. Мосолов, В. П. Мясников*, Матем. сборн., т. 88, № 2 (1972). [5] *О. А. Ладыженская, Н. Н. Уральцева*, Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа, М., 1964. [6] *К. Морен*, Методы гильбертова пространства. М., 1965. [7] *Е. Г. Гольштейн*, Теория двойственности в математическом программировании и ее приложения, М., 1971. [8] *Г. Полиа, Г. Сегё*, Изопериметрические неравенства в математической физике, М., 1962. [9] *А. И. Лурье*, Теория упругости. М., 1970.