Доклады Академии наук СССР
1974. Том 215, № 6

УДК 533.9.13:533.98 ФИЗИКА

М. А. ГИНЦБУРГ

РАЗЛЕТ ИОННОГО ОБЛАКА

(Представлено академиком Я. Б. Зельдовичем 7 V 1973)

Решается следующая задача. При $t=0$ имеется однородный плазменный шар с горячими электронами и холодными ионами $(T_e \gg T_i)$. Радиус шара R_0 меньше дебаевского радиуса $R_д=(\varkappa T_e/(4\pi e^2 n))^{1/2}$. Требуется определить закон расплывания шара в вакуум: скорость $v(r, t)$, плотность $n(r, t)$ и потенциал $\varphi=\varphi(r, t)$.

Потенциальная энергия W электрона внутри шара в точке на расстоянии r от центра равна $W=-eN_1/r=-4\pi e r^2 \cdot {}^1/_3$ ($N_1={}^4/_3\pi n r^3$ — полное число ионов в сфере радиуса r). Если начальный радиус R_0 меньше дебаевского, $R_0<R_д$, то отсюда получим $|W|<\varkappa T_e$: притяжение ионов не в состоянии удержать электроны внутри шара и, двигаясь с тепловой скоростью, они выйдут из пределов ионного облака за время $t_э=R_0/v_{т.э.}$ ($v_{т.э.}$ — тепловая скорость электронов). Ионы за это время сдвинуться не успеют. Получившееся ионное облако почти без электронов медленно разлетается под действием кулоновской силы отталкивания между ионами.

Для решения задачи воспользуемся методом, предложенным в космологии (проблема расширения Вселенной) Я. Б. Зельдовичем ([1]). Допустим, что однородность шара (n не зависит от r) при расплывании сохраняется. Такое предположение удовлетворяет, как оказывается, всем уравнениям задачи (хотя физические условия тут иные — не притяжение, как в теории гравитации, а отталкивание).

Решение уравнения Пуассона внутри шара имеет вид $\varphi=-{}^2/_3\pi e n r^2$.

Запишем уравнение движения ионов на границе шара $r=R(t)$:

$$\frac{dv}{dt}=\frac{e}{M}E=\frac{4\pi}{3}\frac{e^2}{M}R(t)\cdot n(t). \tag{1}$$

Выражая n через полное число частиц N ($N={}^4/_3\pi n R^3$) и учитывая, что $v=dR/dt$, преобразуем (1) к виду

$$d^2R/dt^2=e^2N/(MR^2). \tag{2}$$

Перейдем к безразмерным переменным. Характерные параметры задачи таковы:

$$t_0=\left(\frac{MR_0^3}{2e^2N}\right)^{1/2}=\left(\frac{3}{2}\frac{M}{4\pi e^2 n}\right)^{1/2}=\left(\frac{3}{2}\right)^{1/2}\frac{1}{\omega_{0,\,i}}$$

($\omega_{0,\,i}$ — ионная плазменная частота при $t=0$), скорость

$$v_0=\left(\frac{2e^2N}{MR_0}\right)^{1/2}=\frac{R_0}{R_Д}\left(\frac{2}{3}\right)^{1/2}v_{s,\,i};\quad v_{s,\,i}=\left(\frac{\varkappa T_e}{M}\right)^{1/2}.$$

Умножая обе части (2) на dR/dt и интегрируя при условиях $R|_{t=0}=R_0$, $dR/dt|_{t=0}=0$, получаем для безразмерных величин $\xi=t/t_0$ и $x=R/R_0$ уравнение

$$v(\xi)=dx/d\xi=(1-1/x)^{1/2}. \tag{3}$$

Из (3) следует

$$\xi=\int\frac{x^{1/2}\,dx}{(x-1)^{1/2}},\quad \xi=(x(x-1))^{1/2}+\frac{1}{2}\ln\frac{x^{1/2}+(x-1)^{1/2}}{x^{1/2}-(x-1)^{1/2}}. \tag{4}$$

Кривые $x(\xi)$, $n(\xi)$ и $v(\xi)$, показанные на рис. 1, и дают решение задачи о разлете ионного облака. Но прежде чем их обсуждать, рассмотрим возможную зависимость v от r. Она должна удовлетворять двум уравнениям: уравнению непрерывности

$$\partial n/\partial t+\operatorname{div}(nv)=0 \tag{5}$$

и уравнению движения

$$\partial v/\partial t+v\,\partial v/\partial r=-\partial\varphi/\partial r. \tag{6}$$

Положим по аналогии с космологической задачей $v(r,\ t)=B(t)\cdot r$, где $B(t)$ – постоянная расширения, аналогичная постоянной Хэббла. Если для $B(t)$ и $n(t)$ получится система обыкновенных уравнений, заведомо имеющая решение, то наши допущения о виде функциональной зависимости v и n от r и t ($v=B(t)\cdot r$ и $n(r,t)=n(t)$) правильны.

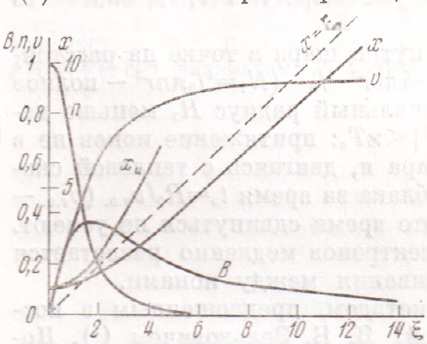

Рис. 1. Зависимость от времени плотности n, скорости B в фиксированной точке, скорости v границы и радиуса $R/R_0=x$ ионного облака

Подставляя $v=B(t)\cdot r$ и $n=n(t)$ в (5) и (6), получаем систему

$$dn/dt+3nB=0,$$
$$dB/dt+B^2={}^1/_3\,\omega_{0,\,i}^2 n \tag{7}$$

двух обыкновенных дифференциальных уравнений, заведомо имеющую при начальных ($t=0$) условиях $B=B_0$ и $n=1$ решение, притом единственное. Поскольку (7) не содержит t, то она допускает понижение порядка. Соответствующее уравнение первого порядка интегрируется в квадратурах.

Положим $y=\ln n$. Тогда (7) сведется к уравнению

$$y''-{}^1/_3(y')^2+\omega_{0,\,i}^2e^y=0. \tag{8}$$

При подстановке $n=N/({}^4/_3\pi R^3)$ уравнение (8) переходит в уравнение (2) для функции $R(t)$, так что в данной задаче уравнение (2) эквивалентно системе (5), (6).

Решение (8) можно получить и не переходя к (2) – подстановкой

$$(y')^2=w(y)\to w=\left(\frac{1}{n}\frac{dn}{dt}\right)^2=C_1n+C_2n^{2/3}.$$

Убедившись в правильности решения, посмотрим, к каким физическим следствиям приводит решение (4) (см. рис. 1). Оно заведомо применимо при $t>R_0/v_{\text{т.э.}}$, т. е. $\xi>0{,}01$. Первый период расширения: $\xi=0{,}01-0{,}5$, $t=(0{,}003-0{,}1)\ \theta_1$ ($\theta_1=2\pi/\omega_{0,\,i}$) – равноускоренное движение под действием постоянной во времени силы (плотность не успела упасть, поле велико), соответственно $v\sim at$. Но радиус шара $R(t)$ не пропорционален времени – начальное состояние еще «не забыто». Величина B характеризует скорость в фиксированной точке пространства, она растет.

Наиболее интересен второй, нелинейный, этап расширения $\xi=0{,}5-5$, $t=(0{,}1-1)\theta_1$. В уравнении движения (6) становится существенным член $v\,\partial v/\partial r\sim B^2$. $B(t)$ меняется не монотонно – достигает максимума и затем плавно убывает со временем. Плотность быстро падает (на 2 порядка), а с нею и сила. Система «забывает» начальные условия и выходит на режим равномерного расширения.

Третий период $\xi>5$, $t>\theta_i$ — движение по инерции. Плотность ионов уже так мала, что силы, создаваемые полем, не могут внести существенный вклад в кинетическую энергию, набранную частицами на предыдущем, нелинейном, этапе расширения. Скорость границы асимптотически приближается к ее максимальному значению $v_0=(2e^2N/(MR_0))^{1/2}\sim\sim(R_0/R_Д)v_{is}$, меньшему скорости ионного звука, v_0 пропорционально корню из полного числа частиц и обратно пропорционально корню из начального радиуса шара. Скорость в фиксированной точке B, наоборот, медленно падает со временем.

Очевидно, на этом третьем этапе расширения проявятся факторы, которых мы в данной идеализации не учли. Это прежде всего поле $\varphi(r, t)$, создаваемое ушедшими электронами — ионное облако фактически расширяется не в вакуум, а в некоторое самосогласованное поле, определяемое функцией распределения электронов и граничными условиями для нее и для потенциала на некоторой внешней границе (стенке) $R_1\gg R_0$.

Неустойчивости. Время раскачки ионных неустойчивостей порядка ионного плазменного периода θ_i, но сам разлет происходит за время меньшее (или равное) θ_i, так что ионные неустойчивости развиться не успеют. Электронных, более быстрых, неустойчивостей в ионном облаке нет, потому что почти нет электронов. Иная ситуация на третьей стадии. Плотность упала на 2 порядка, соответственно ионная плазменная частота возросла на порядок и ионные неустойчивости могут нарасти. Но их конкретный расчет требует знания граничных условий на внешней границе R_1.

Проверим решение (4) на устойчивость и в другом смысле: при малом изменении начальной плотности и начальной скорости соответствующее возмущение не должно нарастать со временем. Этот метод анализа устойчивости разработан в [2].

Искомые относительные возмущения плотности равны

$$\frac{1}{n}\frac{\partial n}{\partial\xi}\delta\xi=\frac{1}{n}\frac{dn}{dx}\frac{dx}{d\xi}d\xi=\frac{3}{x}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{1/2}\delta\xi\sim\frac{1}{t}; \tag{9}$$

$$\pm\frac{1}{n}\frac{\partial n}{\partial v^2}\delta v^2=-\frac{1}{n}\frac{dn}{dx}\frac{\partial f/\partial b}{\partial f/\partial x}db, \tag{10}$$

где $f(b, x)=\xi$ дается соотношением (13). При $x\gg1$ из (10) следует

$$\Delta n/n\sim+6\delta v/v_0. \tag{11}$$

Следовательно, решение (4) устойчиво.

Ионы мы считали холодными. При $v_0\leqslant v_{T,i}=(\varkappa T_i/M)^{1/2}$ такое допущение уже не верно. Отсюда находим нижний предел массы ионного облака, при котором еще допустима наша гидродинамическая модель:

$$R_0>(T_i/T_e)^{1/2}R_Д. \tag{12}$$

Решение (4) можно обобщить и на случай конечной начальной скорости $v_{нач}\neq0$:

$$\xi=\frac{1}{by}(b-y)^{1/2}+\frac{1}{2b^{1/2}}\ln\frac{b^{1/2}+(b-y)^{1/2}}{b^{1/2}-(b-y)^{1/2}},\quad b=1+v_{нач}^2/v_0^2,\quad y=1/R(\xi). \tag{13}$$

Разлет плазменного шнура (цилиндра). Уравнение Пуассона по-прежнему имеет решение $\varphi=ar^2$, $a=-\pi ne$. Уравнение движения границы

$$d^2R/dt^2=2Ne^2/(MR), \quad \text{т. е. } dR/dt=v_0(2\ln(R/R_0))^{1/2}, \tag{14}$$

$$\xi=\frac{1}{2^{1/2}}\int\limits_1^x dx(\ln x)^{-1/2}. \tag{15}$$

В разложении $\ln x=(1-1/x)+{}^1/_2(1-1/x)^2+\ldots$ все члены положительны, так что в цилиндрическом случае (кривая $x_ц$ на рис. 1) радиус шнура растет при всех t быстрее, чем в сферическом.

Закон изменения $B(t)$: $B=v_0(2\ln R/R_0)^{1/2}/R$ — возрастание, максимум, убывание; максимум достигается при $R=1{,}648\ R_0$ и $B_{max}=0{,}607$, т. е. больше, чем для сферы.

Разлет однородного плоского слоя ионов. Уравнение движения границы

$$d^2R/dt^2=4\pi e^2N/M \tag{16}$$

— равноускоренное движение под действием постоянной силы.

Из (16) следует

$$R=At^2+Ct+R_0, \quad n=N/(At^2+Ct+R_0), \quad A=2\pi e^2N/M, \quad C=v_{нач}.$$

Пример. На поверхности Луны дебаевский радиус в солнечном ветре $R_Д\sim10$ м, так что все действия космонавта, а также работа большинства приборов происходят внутри дебаевской сферы. Под действием потоков частиц, солнечного ультрафиолета и рентгена вполне возможно выделение из одежды космонавтов и из других предметов малых количеств ионов, расширение которых описывается нашими уравнениями. При $n=10$ $см^{-3}$, $R_Д\sim10$ м число частиц в сфере $R=R_Д$ $N\sim10^7$.

Автор благодарен акад. Я. Б. Зельдовичу за совет воспользоваться космологической аналогией.

Поступило
28 IV 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *Я. Б. Зельдович*, УФН, т. 80, 357 (1963). [2] *Я. Б. Зельдович, И. Д. Новиков*, Релятивистская астрофизика, «Наука», 1967, гл. 19.