Доклады Академии наук СССР
1974. Том 215, № 6

УДК 513.881 *МАТЕМАТИКА*

М. А. ГОЛЬДМАН, С. Н. КРАЧКОВСКИЙ

ОПЕРАТОРЫ, НУЛИ КОТОРЫХ ОБРАЗУЮТ КОНЕЧНОМЕРНЫЙ ВЫСТУП НА РИССОВСКОМ ЯДРЕ

(Представлено академиком В. И. Смирновым 31 X 1973)

Риссовским ядром линейного оператора A, действующего в векторном пространстве X (вещественном или комплексном), называется множество $\mathfrak{M}(A)=\bigcap_{n=1}^{\infty}\mathscr{R}(A^n)$, где $\mathscr{R}(A^n)$ — область значений оператора A^n [1]. Пусть $\mathscr{D}(A)$ — область определения оператора A, $\mathscr{N}(A)=\{x\in\mathscr{D}(A): Ax=0\}$ и $\gamma(A)=\dim[\mathscr{N}(A)\ominus\mathscr{N}(A)\cap\mathfrak{M}(A)]$ $(=\dim[\mathscr{N}(A)/\mathscr{N}(A)\cap\mathfrak{M}(A)])$. Каждое подпространство $\mathscr{N}'(A)=\mathscr{N}(A)\ominus\mathscr{N}(A)\cap\mathfrak{M}(A)$, дополнительное к $\mathscr{N}(A)\cap\cap\mathfrak{M}(A)$ в $\mathscr{N}(A)$, будем называть выступом нулей A на его риссовском ядре.

Перечислим некоторые используемые ниже факты, которые имеют место в случае конечномерного выступа ($\gamma(A)<\infty$). Прежде всего на основании теоремы 1 из [2а] справедливо равенство $A(\mathscr{D}(A)\cap\mathfrak{M}(A))=\mathfrak{M}(A)$. Далее, если X — топологическое векторное пространство, A — относительно открытое линейное отображение и $\mathscr{R}(A)$ замкнуто, то $\mathfrak{M}(A)$ замкнуто, ибо замкнуты $\mathscr{R}(A^n)$, $n=1, 2, \ldots$ (см. [2б], следствие из теоремы 3); в частности, $\mathfrak{M}(A)$ замкнуто, если X — банахово пространство и A — линейный замкнутый оператор с замкнутой областью значений.

Все дальнейшие рассмотрения будут относиться к этому последнему случаю. Тем самым появляется возможность ввести широко используемый в данной статье оператор $\hat{A}$ (ограниченный, однородный, но вообще говоря нелинейный), определение которого дано в [2в].

Пусть $L(X)$ — пространство всех линейных ограниченных операторов, отображающих X в себя, $L_A(X)$ — подпространство в $L(X)$, состоящее из всевозможных операторов B, коммутирующих с A (т. е. таких, что $BA\subset\subset AB$). Тогда при достаточно малых $B\in L_A(X)$ имеет место включение $\mathfrak{M}(A)\subset\mathfrak{M}(A+B)$ (его доказательство опирается на отмеченное выше равенство $A(\mathscr{D}(A)\cap\mathfrak{M}(A))=\mathfrak{M}(A)$, и сходно с доказательством пункта 7) теоремы 1 в [2г]).

Нашей задачей является исследование возмущенных операторов $A+B$ при условии, что B пробегает некоторую часть $L_A(X)$. Смотря по тому, какая часть $L_A(X)$ выделена, мы приходим к той или другой теореме об инвариантных свойствах оператора A. Прежде всего рассмотрим случай малых B.

Пусть $\mathfrak{N}(A)=\bigcup_{n=1}^{\infty}\mathscr{N}(A^n)$ и $\mathfrak{N}_1(A)$ — линейное множество, дополнительное (в алгебраическом смысле) к $\mathfrak{N}(A)\cap\mathscr{R}(A)$ в $\mathfrak{N}(A)$. Если $\gamma(A)<\infty$, то $\mathfrak{N}_1(A)$ является конечномерным пространством. Считая $\gamma(A)<\infty$, рассмотрим прямую сумму $\mathscr{R}(A)\oplus\mathfrak{N}_1(A)=\mathscr{R}_1(A)$ и обозначим через Π_A порожденный ею оператор проектирования $\mathscr{R}_1(A)$ на $\mathscr{R}(A)$. Поскольку $\mathscr{R}(A)$ и $\mathfrak{N}_1(A)$ замкнуты, оператор Π_A непрерывен. Введем теперь ряд

$$W(B)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\hat{A}\Pi_A B)^n, \tag{1}$$

где $B \in L_A(X)$. Члены этого ряда, во всяком случае, имеют смысл на $\mathfrak{N}(A)$, и ряд сходится, если $\|B\|<(C_A\|\Pi_A\|)^{-1}$, где C_A — положительное число, участвующее в определении оператора $\hat{A}$ ($\|\hat{A}y\|\leqslant C_A\|y\|$ для каждого $y\in\in\mathscr{R}(A)$, см. ([2в])). Таким образом, $W(B)$ можно рассматривать как оператор, определенный на $\mathfrak{N}(A)$, если $\|B\|<(C_A\|\Pi_A\|)^{-1}$; при этом $\mathscr{R}(W(B))\subset\subset\overline{\mathfrak{N}(A)}$.

Рассмотрим далее оператор $A+\Pi_A B$ с областью определения $\mathscr{D}(A+ +\Pi_A B)=\{x\in\mathscr{D}(A):\ Bx\in\mathscr{R}_1(A)\}$. Можно доказать, что при достаточно малых B

$$N(A+\Pi_A B)=\overline{\mathscr{L}(\mathscr{R}(W(B)\,|_{N(A)}))},\tag{2}$$

где $\mathscr{L}(E)$ обозначает линейную оболочку множества E.

Если оператор $\hat{A}$, входящий в выражение для $W(B)$, выбран так, что его сужение на множество $\mathfrak{N}_2(A)=\mathfrak{N}(A)\cap\mathscr{R}(A)\ominus\mathfrak{N}(A)\cap\mathfrak{M}(A)$ линейно и $\hat{A}(x_1+x_2)=\hat{A}x_1+\hat{A}x_2$ для любых $x_1\in\mathfrak{N}(A)\cap\mathfrak{M}(A)$ и $x_2\in\mathfrak{N}_2(A)$ (указанный выбор оператора $\hat{A}$ всегда осуществим), то при этих условиях формула (2) может быть записана в виде

$$\mathscr{N}(A+\Pi_A B)=\overline{\mathscr{L}(\mathscr{R}(W(B)\,|_{\mathscr{N}(A)\cap\mathfrak{M}(A)}))}\oplus\mathscr{R}(W(B)\,|_{\mathscr{N}'(A)}).\tag{3}$$

Теорема 1. *Пусть X — банахово пространство и A — линейный замкнутый оператор, действующий в X. Если $\mathscr{R}(A)$ замкнуто и $\gamma(A)<\infty$, то для достаточно малых $B\in L_A(X)$ имеет место неравенство $\gamma(A+B)\leqslant\gamma(A)$.*

Доказательство опирается на формулу (3). С ее помощью, принимая во внимание очевидное включение $\mathscr{N}(A+B)\subset\mathscr{N}(A+\Pi_A B)$, а также тот факт, что при достаточно малых $B\in L_A(X)$ имеют место соотношения

$$\overline{\mathscr{L}(\mathscr{R}(W(B)\,|_{\mathscr{N}(A)\cap\mathfrak{M}(A)}))}=\mathscr{N}(A+B)\cap\mathfrak{M}(A),\ \dim\mathscr{R}(W(B)\,|_{\mathscr{N}'(A)})=\gamma(A),$$

заключаем, что размерность выступа нулей $A+B$ на $\mathfrak{M}(A)$ не превышает $\gamma(A)$. Так как $\mathfrak{M}(A)\subset\mathfrak{M}(A+B)$, то тем более не превысит $\gamma(A)$ и размерность выступа $\mathscr{N}'(A+B)$ нулей $A+B$ на $\mathfrak{M}(A+B)$, т. е. $\gamma(A+B)\leqslant\gamma(A)$.

Пусть $\mathscr{P}(A)$ и $\mathscr{Q}(A)$ — множества всех операторов из $L(X)$, которые проектируют X соответственно на $\mathscr{N}(A)$ или на $\mathscr{R}(A)$. Нашей дальнейшей задачей является исследование возмущенных операторов $A+B$ при условии, что $\mathscr{P}(A)$ или $\mathscr{Q}(A)$ не пусто. Основным средством для этого служат ряды

$$T(B)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\hat{A}B)^n,\quad U(B)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\hat{A}Q_A B)^n,$$

где Q_A означает какой-либо элемент множества $\mathscr{Q}(A)$. Легко видеть, что члены ряда $U(B)$ определены на всем X для произвольных $B\in L(X)$ и $Q_A\in\mathscr{Q}(A)$. Что касается членов ряда $T(B)$, то, как и в случае ряда $W(B)$, мы будем считать, что $B\in L_A(X)$ и $\mathscr{D}((\hat{A}B)^n)=\mathfrak{N}(A)$, $n=0,1,\ldots$ Ряд $T(B)$ сходится, если $\|B\|<C_A^{-1}$, а ряд $U(B)$, если $\|B\|<(C_A\|Q_A\|)^{-1}$. Таким образом, для указанных B области определения операторов $T(B)$ и $U(B)$ будут соответственно $\mathfrak{N}(A)$ и X.

Если $\mathscr{P}(A)\neq\phi$, то оператор $\hat{A}$ можно сделать линейным ограниченным, определив его равенством $\hat{A}=(A\,|_{\mathscr{D}(A)\cap\mathscr{N}(P_A)})^{-1}$, где P_A — любой оператор из $\mathscr{P}(A)$.

Если $\mathscr{Q}(A)\neq\phi$, то существует такое $Q_A\in\mathscr{Q}(A)$, что $Q_A(\mathfrak{N}_1(A))=\{0\}$. В этом можно убедиться следующим образом. Пусть $\tilde{Q}_A$ — фиксированный оператор из $\mathscr{Q}(A)$, $x_1,\ldots,x_n$ — базис в $\mathfrak{N}_1(A)$ и $f_1,\ldots,f_n$ — функционалы из X^*, биортогональные к $x_1,\ldots,x_n$ и обращающиеся в нуль на $\mathscr{R}(A)$.

Тогда требуемый оператор Q_A запишется формулой $Q_Ax=\tilde{Q}_A(x-\sum_{i=1} f_i(x)x_i)$ для каждого $x\in X$.

Теорема 2. *Пусть X — банахово пространство и A — линейный замкнутый оператор, действующий в X. Если $\mathscr{R}(A)$ замкнуто, $\gamma(A)<\infty$ и $\mathscr{P}(A)\cup\mathscr{Q}(A)\neq\phi$, то для достаточно малых $B\in L_A(X)$ множество $\mathscr{R}(A+B)$ замкнуто. При этом, если $\mathscr{P}(A)\neq\phi$ (соответственно $\mathscr{Q}(A)\neq\phi$), то $\mathscr{P}(A+B)\neq\phi$ (соответственно $\mathscr{Q}(A+B)=\phi$).*

Доказательство проводится различно в зависимости от того, какое из множеств $\mathscr{P}(A)$ или $\mathscr{Q}(A)$ не является пустым. Наметим вкратце план доказательства в каждом из этих случаев (отмечаемых ниже цифрами I и II).

I. 1) $\mathscr{R}(A+B)$ замкнуто. Пусть $\hat{A}=(A|_{\mathscr{D}(A)\cap\mathscr{N}(P_A)})^{-1}$, где $P_A\in\mathscr{P}(A)$. Тогда, рассуждая как при доказательстве пункта 2 теоремы 1 в (2в), получим для достаточно малых $B\in L_A(X)$ равенство

$$\mathscr{N}(A+B)\cap\mathfrak{M}(A)=\mathscr{R}(T(B)|_{\mathscr{N}(A)\cap\mathfrak{M}(A)}). \tag{4}$$

Пусть $P_A'\in L(N(A))$ — оператор проектирования $\mathscr{N}(A)$ на $\mathscr{N}(A)\cap\mathfrak{M}(A)$ и $P_A''=P_A'P$. Тогда $P''_{A+B}=T(B)P_A''$ будет в силу (4) оператором проектирования X на $\mathscr{N}(A+B)\cap\mathfrak{M}(A)$, причем $\mathscr{N}''(P''_{A+B})=\mathscr{N}(P_A)\oplus\mathscr{N}(P'_A)$. Очевидно, $\mathscr{R}(A+B)=(A+B)(\mathscr{N}(P''_{A+B})\cap\mathscr{D}(A))=(A+B)\cdot(\mathscr{N}(P_A)\cap\mathscr{D}(A))\oplus(A+B)(N(P_A'))$. Ввиду конечномерности последнего слагаемого, достаточно доказать замкнутость множества $(A+B)(\mathscr{N}(P_A)\cap\mathscr{D}(A))$. Это можно сделать, установив, что отображение $(A+B)|_{\mathscr{N}(P_A)\cap\mathscr{D}(A)}$ относительно открыто.

2) $\mathscr{P}(A+B)=\phi$. $\mathfrak{M}(A+B)$ замкнуто, ибо замкнуто $\mathscr{R}(A+B)$ и $\gamma(A+B)<\infty$ (при малых B). Имея оператор P''_{A+B}, построим оператор $P'''_{A+B}\in L(X)$, проектирующий X на $\mathscr{N}(A+B)\cap\mathfrak{M}(A)$ и такой, что $\mathscr{N}'(A+B)\oplus\mathscr{N}(P_A)\subset\mathscr{N}(P'''_{A+B})$ (это возможно в силу конечности $\gamma(A+B)$ и дизъюнктности $\mathscr{N}(P_A)$ с $\mathscr{N}(A+B)$. Пусть, далее, $P'_{A+B}\in L(X)$ — такой оператор проектирования X на $\mathscr{N}'(A+B)$, что $\mathscr{N}(A+B)\cap\mathfrak{M}(A+B)\subset\mathscr{N}(P'_{A+B})$. Тогда $P_{A+B}=P'''_{A+B}+P'_{A+B}\in\mathscr{P}(A+B)$, причем $\mathscr{N}(P_A)\subset\mathscr{N}(P_{A+B})$.

II. 1) $\mathscr{R}(A+B)$ замкнуто. Пусть Q_A выбран так, что $Q_A(\mathfrak{R}_1(A))=\{0\}$; тогда, очевидно, $Q_A(\mathfrak{R}(A))\subset\mathfrak{R}(A)$. Рассматривая далее отображение $V=Q_A|_{\mathscr{R}(A+B)}$, показываем, используя ряд $U(B)$, что $\dim N(V)<\infty$, $\mathscr{R}(V)=\mathscr{R}(A)$ и что V относительно открыто. Отсюда, на основании теоремы 1 из (2б), вытекает замкнутость V и, тем самым (принимая во внимание непрерывность V), замкнутость $\mathscr{D}(V)=\mathscr{R}(A+B)$.

2) $\mathscr{Q}(A+B)\neq\phi$.

Представим $\mathscr{R}(A+B)$ в виде $\mathscr{N}(V)\oplus\mathscr{R}'(A+B)$, где $\mathscr{R}'(A+B)$ замкнуто. Пусть $V_1=V|_{\mathscr{R}'(A+B)}$ и $Q'_{A+B}=V_1^{-1}Q_A$. Очевидно $Q'_{A+B}\in L(X)$, $\mathscr{N}(Q'_{A+B})\supset\mathscr{N}(V)$ и Q'_{A+B} проектирует X на $\mathscr{R}'(A+B)$. Пусть, далее, $Q''_{A+B}\in L(X)$ проектирует X на $\mathscr{N}(V)$ и $\mathscr{N}(Q''_{A+B})\supset\mathscr{R}'(A+B)$. Тогда $Q_{A+B}=Q'_{A+B}+Q''_{A+B}\in\mathscr{Q}(A+B)$, причем $\mathscr{N}(Q_{A+B})\subset\mathscr{N}(Q_A)$.

Теоремы 1 и 2 носят локальный характер, ибо все возмущающие операторы $B\in L_A(X)$, для которых $\gamma(A+B)\leqslant\gamma(A)$ — в теореме 1, и $\gamma(A+B)\leqslant\gamma(A)$, $\mathscr{R}(A+B)=\overline{\mathscr{R}(A+B)}$, $\mathscr{P}(A+B)\cup\mathscr{Q}(A+B)\neq\phi$ — в теореме 2, берутся малыми.

Далее мы рассмотрим также большие возмущения оператора A, позволяя B пробегать произвольную по размерам часть $L_A(X)$. Пусть $\mathfrak{B}$ — некоторое подпространство в $L_A(X)$, состоящее из коммутирующих друг с другом операторов. Выделим в $\mathfrak{B}$ множество $\mathfrak{P}$ (соответственно $\mathfrak{Q}$) таких операторов B, что: 1) $\mathscr{R}(A+B)$ замкнуто; 2) $\gamma(A+B)<\infty$; 3) $\mathscr{P}(A+B)\neq\phi$ (соответственно $\mathscr{Q}(A+B)\neq\phi$). В силу теорем 1 и 2 множества $\mathfrak{P}$ и $\mathfrak{Q}$ открыты в $\mathfrak{B}$ и, следовательно, каждое из них распадается на связные компоненты. Пусть G — какая-либо из этих компонент и $\Gamma=\{B\in G\colon \gamma(A+B)\neq\neq 0\}$.

Имеет место следующая теорема, характеризующая строение Γ в G.

Теорема 3. *Каково бы ни было* $\mathfrak{B}$, *множество* Γ *замкнуто в* G. *Если* $\mathfrak{B}$ *содержит биективный оператор, то* Γ *нигде не плотно в* G; *если* $\mathfrak{B}$ — *одномерное пространство, порожденное биективным оператором, то* Γ — *изолированное множество в* G.

Доказательство опирается на теоремы 1 и 2 и на тот факт, что в случае биективного оператора $B\in L_A(X)$ имеет место включение $N(A+B)\subset\mathfrak{M}(A)$.

Нетрудно показать на примерах, что если одномерное пространство $\mathfrak{B}$ порождено не биективным отображением $B\in L_A(X)$, то множество Γ может не быть изолированным и даже нигде не плотным в своей компоненте.

Московский институт инженеров
железнодорожного транспорта

Поступило
1 X 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *F. Riss*, Acta Math., v. 41, 71 (1918); УМН, т. 1, 175 (1936). [2] *М. А. Гольдман, С. Н. Крачковский*, а) ДАН, т. 158, № 3 (1964); б) ДАН, т. 181, № 5 (1968); в) ДАН, т. 209, № 4 (1973); г) ДАН, т. 197, № 6 (1971).