Доклады Академии наук СССР
1974. Том 215, № 6

УДК 517.948 *МАТЕМАТИКА*

А. Д. ГОРБУНОВ

ОБОБЩЕНИЯ МЕТОДА СЖИМАЮЩИХ ОТОБРАЖЕНИЙ

(Представлено академиком А. Н. Тихоновым 21 IX 1973)

1. Пусть заданы некоторое пространство L и оператор A, определенный на нем, и требуется найти неподвижные точки оператора A, т. е. такие точки $x \in L$, для которых справедливо равенство

$$x = Ax. \tag{1}$$

Априори возможны следующие три случая: 1) оператор A неподвижных точек не имеет, 2) оператор A имеет единственную неподвижную точку, 3) оператор A имеет по крайней мере две неподвижные точки.

Статья посвящается изложению признаков различения перечисленных случаев.

2. Пусть на пространстве L определена какая-либо метрика ρ. Пополнение метрического пространства (L, ρ) обозначим через R_ρ. Предполагая, что оператор A непрерывен, продолжим его по непрерывности на все пространство R_ρ и полученное ρ-продолжение обозначим через $\tilde{A}$.

Всякую неподвижную точку оператора A будем называть классическим решением задачи (1). Всякую неподвижную точку оператора $\tilde{A}$, не принадлежащую L, будем называть ρ-обобщенным решением задачи (1). Решением задачи (1) будем называть классическое или ρ-обобщенное ее решение.

3. Обозначим через $\tilde{M}_\rho$ множество операторов A, определенных и непрерывных на пространстве L, которые удовлетворяют следующему условию: существует открытое покрытие Σ_A пространства R_ρ такое, что для каждой области $G \in \Sigma_A$ найдется целое число $n_G \geqslant 1$ и полные подпространства R_i, $i = 1, \ldots, n_G$, пространства R_ρ такие, что каждому элементу x пространства R_ρ сопоставлена определенная конечная последовательность $(x_1, \ldots, x_{n_G})$, $x_i \in R_i$, $i = 1, \ldots, n_G$, и различным элементам из R_ρ сопоставлены различные такие конечные последовательности, причем на каждой из областей $G \cap R_i$ (G фиксирована) определено сжимающее отображение $B_{G,i}$ в пространство R_i такое, что задачи

$$x_i = B_{G,i} x_i, \quad x_i \in G \cap R_i, \quad i = 1, \ldots, n_G, \tag{2}$$

в своей совокупности равносильны уравнению (1) на области G.

Будем говорить, что конечная последовательность $(x_1, \ldots, x_{n_G})$, $x_i \in R_i$, $i = 1, \ldots, n_G$, удовлетворяет «условиям склейки», если она сопоставлена некоторому элементу $x \in R_\rho$.

Равносильность совокупности уравнений (2) уравнению (1) на области G понимается в том смысле, что если существует решение $\tilde{x}$ задачи (1), принадлежащее области G, то элементы соответствующей конечной последовательности $(\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_{n_G})$, $x_i \in R_i$, $i = 1, \ldots, n_G$, являются решениями соответствующих задач (2); наоборот, если решения $\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_{n_G}$ соответственно задач (2), рассматриваемые как конечная последовательность, удовлетворяет условиям склейки, то элемент $\tilde{x}$ пространства R_ρ, отвечающий этой конечной последовательности, является решением уравнения (1), принадлежащим области G.

Области $G \in \Sigma_A$ и отображения $B_{G,i}$, $i=1, \ldots, n_G$, описанные выше, будем называть характеристическими для оператора A, а отображения $B_{G,i}$ — соответствующими области G.

Всякий оператор $A \in \tilde{M}_\rho$ будем называть слабо локально ρ-сжимающим.

Обозначим через M_ρ^* подмножество множества $\tilde{M}_\rho$, состоящее из тех и только тех операторов A, для которых покрытие Σ_A состоит лишь из одной области — пространства R_ρ. Всякий оператор $A \in M_\rho^*$ будем называть слабо ρ-сжимающим.

Обозначим через M_ρ подмножество множества $\tilde{M}_\rho$, состоящее из тех и только тех операторов A, для которых всякий раз $n_G=1$, $G \in \Sigma_A$, причем всякий раз $R_1=R_\rho$.

Всякий оператор $A \in M_\rho$ будем называть локально ρ-сжимающим.

4. Обозначим через $M_\rho^{(i)}$ $(\tilde{M}_\rho^{(i)})$ множество операторов $A \in M_\rho$ $(\tilde{M}_\rho)$, для которых существует i решений уравнения (1), $i=0, 1$, и через $M_\rho^{(2)}$ $(\tilde{M}_\rho^{(2)})$ — множество операторов $A \in M_\rho$ $(\tilde{M}_\rho)$, для которых существует по крайней мере два решения уравнения (1). Ясно, что множества $M_\rho^{(i)}$ $(\tilde{M}_\rho^{(i)})$, $i=0, 1, 2$, подразбивают множество M_ρ $(\tilde{M}_\rho)$ на классы.

Теорема 1. *Пусть $A \in M_\rho$. Тогда для того чтобы $A \in M_\rho^{(1)} \cup M_\rho^{(2)}$, необходимо и достаточно, чтобы нашлась по крайней мере одна характеристическая область G для оператора A, содержащая точку x_0, для которой существует действительное положительное число r_0 такое, что выполняются условия:*

а) *замкнутая сфера $[S(x_0, r_0)]$ пространства R_ρ принадлежит области G,*

б) *справедливо неравенство*

$$\rho(x_0, B_G x_0) \leqslant (1-\alpha_G) r_0,$$

где B_G — характеристическое отображение, соответствующее области G, α_G — коэффициент сжатия отображения B_G.

5. Пусть $A \in M_\rho^{(1)} \cup M_\rho^{(2)}$. Тогда по теореме 1 найдется по крайней мере одна характеристическая область G для оператора A, содержащая точку x_0, для которой существует действительное положительное число r_0 такое, что выполняются условия а) и б). Отсюда по локальной теореме о сжимающих отображениях (см. [1], стр. 157) вытекает, что в замкнутой сфере $[S(x_0, r_0)]$ пространства R_ρ содержится единственное решение уравнения (1).

Теорема 2. *Пусть $A \in M_\rho^{(1)} \cup M_\rho^{(2)}$. Тогда для того чтобы $A \in M_\rho^{(2)}$, необходимо и достаточно, чтобы нашлась по крайней мере одна область $G \setminus [S(x_0, r_0)]$, $G \in \Sigma_A$, содержащая точку x_1, для которой существует действительное положительное число r_1 такое, что выполняются условия:*

в) *замкнутая сфера $[S(x_1, r_1)]$ пространства R_ρ содержится в области $G \setminus [S(x_1, r_1)]$,*

г) *выполняется неравенство*

$$\rho(x_1, B_G x_1) \leqslant (1-\alpha_G) r_1.$$

6. Пусть L_0 обозначает множество действительных чисел x. Пусть на пространстве L_0 задана действительная функция $f(x)$ и требуется определить ее нули. Ясно, что эта задача эквивалентна задаче о неподвижных точках оператора $A(x)=x+f(x)$, определенного на пространстве L_0. Мет-

рику ρ_0 на пространстве L_0 определим равенством

$$\rho_0(x_1, x_2)=|x_1-x_2|, \quad x_1, x_2\in L_0.$$

Так как метрическое пространство (L_0, ρ_0) полное, то $R_{\rho_0}=(L_0, \rho_0)$.

Легко видеть, что множество M_{ρ_0} не пусто. В частности, этому множеству принадлежит всякий оператор $A(x)=x+f(x)$, отвечающий функции $f(x)$, определенной и дважды непрерывно дифференцируемой на L_0, первая производная которой имеет простые, а вторая — изолированные нули.

7. Каждую из задач (2) будем называть разрешимой, если она имеет по крайней мере одно решение. Необходимые и достаточные условия разрешимости задачи (2) содержатся в локальной теореме о сжимающих отображениях.

Теорема 3. *Пусть $A\in\widetilde{M}_\rho$. Тогда для того чтобы $A\in\widetilde{M}_\rho^{(1)}\cup\widetilde{M}_\rho^{(2)}$, необходимо и достаточно, чтобы нашлась по крайней мере одна характеристическая область G для оператора A, для которой каждое из уравнений (2) разрешимо и существует по крайней мере одна конечная последовательность $(\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_{n_G})$ решений этих уравнений, удовлетворяющая условиям склейки.*

8. Пусть $A\in\widetilde{M}_\rho^{(1)}\cup\widetilde{M}_\rho^{(2)}$. Тогда по теореме 3 найдется такая область $G_0\in\Sigma_A$, для которой каждое из уравнений (2) при $G=G_0$ разрешимо и существует конечная последовательность решений этих уравнений, для которой выполняются условия склейки.

Теорема 4. *Пусть $A\in\widetilde{M}_\rho^{(1)}\cup\widetilde{M}_\rho^{(2)}$. Тогда для того чтобы $A\in\widetilde{M}_\rho^{(1)}$, необходимо и достаточно, чтобы либо каждое из уравнений (2) при $G=G_0$ было однозначно разрешимо и конечная последовательность соответствующих решений удовлетворяла условиям склейки, либо каждое из уравнений (2) при $G=G_0$ было разрешимо и существовала единственная конечная последовательность их решений, удовлетворяющая условиям склейки, причем каждый раз ни одна из областей $G\diagdown[G_0]$, $G\in\Sigma_A$, не содержит решений уравнения (1).*

Замечание. Если оператор $A\in M_\rho^*$, то каждое из уравнений (2) однозначно разрешимо.

9. Пусть задано обыкновенное дифференциальное уравнение

$$y^{(2n)}=K(x, y, y', \ldots, y^{(2n-1)}), \tag{3}$$

где $n>0$ — целое число, x — действительная независимая переменная, y — исковая функция от x, $K(x, y, \ldots, y^{(2n-1)})$ — действительная функция, заданная на топологическом произведении луча $a\leqslant x<+\infty$ (a задано) на действительное линейное пространство $E^{2n}(y, \ldots, y^{(2n-1)})$.

Пусть заданы однородные краевые условия

$$\begin{gathered} y(a)=y'(a)=\ldots=y^{(n-1)}(a)=0. \\ y(b)=y'(b)=\ldots=y^{(n-1)}(b)=0, \end{gathered} \tag{4}$$

где b — действительный параметр, $a<b$.

Требуется определить значения параметра b, для которых существуют решения уравнения (3), удовлетворяющие условиям (4).

Задача (3), (4), как известно, эквивалентна операторному уравнению

$$y=Ty,$$

где

$$Ty=\int\limits_a^b \mathcal{G}(x, \xi)K(\xi, y(\xi), \ldots, y^{(2n-1)}(\xi))\,d\xi \tag{5}$$

— оператор, распространенный на $2n$ раз дифференцируемые функции от x, определенные на отрезке $[a, b]$; $\mathscr{G}(x, \xi)$ — функция Грина для уравнения $y^{(2n)}=g(x)$ с краевыми условиями (4).

Рассмотрим пространство $L_{2n}[a, b]$ $2n$ раз дифференцируемых функций от x и определим в нем норму $\|\cdot\|_1$, полагая

$$\|y\|_1 = \max_{a\leqslant x\leqslant b} \sum_{i=0}^{2n-1} |y^{(i)}(x)|, \quad y\in L_{2n}[a, b];$$

при этом расстояние в пространстве $(L_{2n}, \|\cdot\|_1)$ обозначим через ρ_1, пополнение пространства (L_{2n}, ρ_1) — через $R_{\rho_1}[a, b]$.

В пространстве $E^{2n}(y, \dots, y^{(2n-1)})$ введем норму $\|\cdot\|_2$, полагая

$$\|(y, \dots, y^{(2n-1)})\|_2 = \sum_{i=0}^{2n-1} |y^{(i)}|.$$

Пусть для каждого числа $r_k>0$ из монотонно неубывающей расходящейся последовательности действительных чисел r_k, $k=1, 2, \dots$, на цилиндре $(a\leqslant x<+\infty)\times[S_2(0, 2r_k)]$, где $[S_2(0, 2r_k)]$ — замкнутая сфера пространства $(E^{2n}, \|\cdot\|_2)$ с центром в O и радиусом $2r_k$, выполняется условие Липшица

$$|K(x, y_1, \dots, y_1^{(2n-1)}) - K(x, y_2, \dots, y_2^{(2n-1)})| \leqslant$$
$$\leqslant \gamma_k \|(y_1-y_2, \dots, y_1^{(2n-1)} - y_2^{(2n-1)})\|_2,$$

где γ_k — наименьшая из констант, удовлетворяющих последнему условию.

Тогда, если $\lim\limits_{k\to+\infty} \gamma_k<+\infty$, то определенный равенством (5) оператор $T\in M_{\rho_1}^*$; если же $\lim\limits_{k\to+\infty} \gamma_k=+\infty$, то $T\in \tilde{M}_{\rho_1}$.

Приведенные выше определения и теоремы могут быть обобщены на случай, когда ρ обозначает псевдометрику (см. [2], стр. 58).

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
13 VII 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *А. Д. Горбунов*, Вычислительная математика. Препринт ВЦ МГУ, 1968.
[2] *Л. Коллатц*, Функциональный анализ и вычислительная математика, М., 1969.