Доклады Академии наук СССР
1974. Том 215, № 6

УДК 517.946 *МАТЕМАТИКА*

Д. Г. ГОРДЕЗИАНИ

О РАЗРЕШИМОСТИ НЕКОТОРЫХ ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ОДНОГО ВАРИАНТА ТЕОРИИ ТОНКИХ ОБОЛОЧЕК

(Представлено академиком И. Н. Векуа 27 IX 1973)

В работе показано, что для упругих оболочек, описываемых уравнениями [1, 2], при соответствующих граничных условиях верно неравенство Корна. Благодаря этому можно доказать разрешимость поставленных граничных задач и обосновать применимость к ним различных приближенных методов [3, 4]. Заметим, что единственность решения всех возможных краевых задач и разрешимость некоторых из них методом интегральных уравнений дается в [1, 2].

Для простоты изложения ограничимся рассмотрением призматических оболочек. Записав уравнения [2] в изометрической системе координат, можно показать, что результаты справедливы и в случае произвольных оболочек.

В дальнейшем используются общепринятые обозначения: $\Omega\subseteq R^2$ — некоторая область с границей Γ, $x=(x_1, x_2)\in\Omega$, $dx=dx_1dx_2$; $H^0=L^2(\Omega)$ — пространство функций, квадратично суммируемых на Ω; $H^m(\Omega)$ — пространство Соболева порядка m в Ω; $H^{-m}(\Omega)=(H_0{}^m(\Omega))'$ — сопряженное к $H_0{}^m(\Omega)$, где $H_0{}^m(\Omega)$ — замыкание $D(\Omega)=\{v\,|\,v\in D(\Omega)$, v — бесконечно дифференцируемая функция с компактным носителем в $\Omega\}$; $u(x)=(u_1(x), u_2(x),\ldots,u_n(x))'$ — вектор-функция столбец, и, если $\forall i$ $u_i(x)\in H$, то будем писать $u(x)\in(H)^n$; $\|\cdot\|_H$, $(\cdot,\ \cdot)_H$ — соответственно норма и скалярное произведение в H. Отметим также, что в работе используется принятое в тензорном анализе правило суммирования — латинские буквы пробегают значения 1, 2, 3, греческие — 1, 2 (см. например, [2]).

Согласно [1, 2], равновесие упругих призматических оболочек описывается системой дифференциальных уравнений

$$-\frac{1}{2k+1}\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\overset{k}{P}_{\alpha\beta}+(\overset{k-1}{P}_{\beta3}+h^2\overset{k-3}{P}_{\beta3}+\cdots)-h\frac{\partial h}{\partial x_\alpha}(\overset{k-2}{P}_{\alpha\beta}+h^2\overset{k-4}{P}_{\alpha\beta}+\cdots)+$$
$$+\overset{k}{F}_\beta=0,\quad \beta=1,2, \tag{1}$$
$$-\frac{1}{2k+1}\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\overset{k}{P}_{\alpha3}+(\overset{k-1}{P}_{33}+h^2\overset{k-3}{P}_{33}+\cdots)-h\frac{\partial h}{\partial x_\alpha}(\overset{k-2}{P}_{\alpha3}+h^2\overset{k-4}{P}_{\alpha3}+\cdots)+$$
$$+\overset{k}{F}_3=0,$$
$$k=0, 1,\ldots, N,\quad \overset{k}{P}_{ij}=0,\quad \text{когда } k>N,$$

где

$$\overset{k}{P}_{\alpha\beta}=\lambda\overset{k}{\theta}(u)\delta_{\alpha\beta}+2\mu\overset{k}{e}_{\alpha\beta}(u),\qquad \overset{k}{P}_{\alpha3}=2\mu\overset{k}{e}_{\alpha3}(u),$$
$$\overset{k}{P}_{33}=\lambda\overset{k}{\theta}(u)+2\mu\overset{k}{e}_{33}(u),\qquad \delta_{\alpha\beta}\text{ — символ Кронекера},$$
$$\overset{k}{e}_{\alpha\beta}(u)=0{,}5h^{2k+1}\left\{\frac{\partial\overset{k}{u}_\beta}{\partial x_\alpha}+\frac{\partial\overset{k}{u}_\alpha}{\partial x_\beta}-\overset{k}{u}_\beta{}'\frac{\partial\ln h}{\partial x_\alpha}-\overset{k}{u}_\alpha{}'\frac{\partial\ln h}{\partial x_\beta}\right\},\qquad \overset{k}{e}_{33}(u)=h^{2k+1}\overset{k}{u}_0{}'',$$
$$\overset{k}{e}_{\alpha3}(u)=0{,}5h^{2k+1}\left\{\frac{\partial\overset{k}{u}_3}{\partial x_\alpha}+\overset{k}{u}_\alpha{}''-\overset{k}{u}_3{}'\frac{\partial\ln h}{\partial x_\alpha}\right\},$$

$$\overset{k}{\theta}(u) = h^{2k+1}\left\{\frac{\partial \overset{k}{u}_\alpha}{\partial x_\alpha} - \overset{k}{u}_\alpha{}'\frac{\partial \ln h}{\partial x_\alpha} + \overset{k}{u}_3{}''\right\},$$

$$\overset{k}{u}{}'' = (2k+1)\sum_{m=0} h^{2m}\overset{k+2m+1}{u}, \quad \overset{k}{u}{}' = (2k+1)\sum_{m=1} h^{2m}\overset{k+2m}{u}, \quad \overset{k}{u}_i \equiv 0, \text{ когда } k > N;$$

λ и μ — постоянные Ламе, $h=h(x_1, x_2)\geqslant h_0=\text{const}>0$ — ограниченная функция на $\overline{\Omega}$ вместе со своими первыми производными; $2h$ — толщина оболочки; $\overset{k}{u}_i(x)$, $k=0, 1, \ldots, N$; $i=1, 2, 3$,— искомые и $\overset{k}{F}_i(x)\in L^2(\Omega)$, $k=0, 1, \ldots, N$; $i=1, 2, 3$,— заданные функции.

Сделаем предположения относительно Ω и Γ: а) Ω — сумма областей, каждая из которых звездная относительно некоторого шара; б) Γ — кусочно-гладкая кривая. Пусть $\Gamma=\Gamma_u\cup\Gamma_\varphi$, $\Gamma_u\cap\Gamma_\varphi=0$.

Обозначим через A оператор системы (1). Поставим следующую задачу: найти решение $u(x)=(\overset{\circ}{u}_1, \overset{\circ}{u}_2, \overset{\circ}{u}_3, \ldots, \overset{N}{u}_1, \overset{N}{u}_2, \overset{N}{u}_3)'$ уравнения

$$Au=F \text{ в } \Omega; \quad F=(\overset{\circ}{F}_1, \overset{\circ}{F}_2, \overset{\circ}{F}_3, \ldots, \overset{N}{F}_1, \overset{N}{F}_2, \overset{N}{F}_3)' \tag{2}$$

удовлетворяющее граничным условиям.

$$u(x)=\overline{u}, \quad \overline{u} \text{ задано на } \Gamma_u, \tag{3}$$

$$P_l\equiv P_1\cos(l, x_1)+P_2\cos(l, x_2)=\varphi, \quad \varphi \text{ задано на } \Gamma_\varphi, \tag{4}$$

где l — внешняя единичная нормаль к Γ, $P_\alpha=(\overset{\circ}{P}_{1\alpha}, \overset{\circ}{P}_{2\alpha}, \overset{\circ}{P}_{3\alpha}, \ldots, \overset{N}{P}_{1\alpha}, \overset{N}{P}_{2\alpha}, \overset{N}{P}_{3\alpha})$.

Замечание 1. Γ_u или Γ_φ может быть пустым.

Согласно ([2]) справедлива формула Грина

$$(Au, v)_{(H^0)^n} = a(u, v) - \sum_{k=0}^{N}\frac{1}{2k+1}\int_\Gamma \overset{k}{P}_{\alpha i}\overset{k}{v}_i l_\alpha d\Gamma \quad \forall u, v\in (H^1(\Omega))^n,$$

где $a(u, v)$ — билинейная форма,

$$a(u, v) = \sum_{k=0}^{N}\frac{1}{2k+1}\int_\Omega h^{-2k-1}\{\lambda\overset{k}{\theta}(u)\overset{k}{\theta}(v) + 2\mu\overset{k}{e}_{\alpha\beta}(u)\overset{k}{e}_{\alpha\beta}(v) +$$

$$+ 4\mu\overset{k}{e}_{\alpha 3}(u)\overset{k}{e}_{\alpha 3}(v) + 2\mu\overset{k}{e}_{33}(u)\overset{k}{e}_{33}(v)\}\,dx, \tag{5}$$

l_α, $\alpha=1, 2$,— составляющие l и $n=3(N+1)$.

Замечание 2. Из (5) следует, что форма $a(u, v)$ симметрична и

$$\mathscr{E}(u)\equiv a(u, u)\geqslant\frac{2\mu}{\underline{h}^{2k+1}(2N+1)}\sum_{k=0}^{N}\int_\Omega\{\overset{k}{e}_{\alpha\beta}(u)\overset{k}{e}_{\alpha\beta}(u) + \overset{k}{e}_{\alpha 3}(u)\overset{k}{e}_{33}(u) + e^2_{33}(u)\}\,dx,$$

где $\underline{h}=\max\limits_{\overline{\Omega}} h(x_1, x_2)$.

Пусть теперь

$$V = \{v(x)\,|\,v = (\overset{\circ}{v}_1, \overset{\circ}{v}_2, \overset{\circ}{v}_3, \ldots, \overset{N}{v}_1, \overset{N}{v}_2, \overset{N}{v}_3),\ \overset{k}{v}_i\in H^1(\Omega)\}.$$

Покажем, что имеет место следующая вспомогательная

Теорема 1. *Если для Ω и Γ выполнены условия* а) *и* б), *то существует такое* $\nu=\text{const}>0$, *зависящее от* Ω, *что*

$$\mathscr{E}(v)+\|v\|^2_{(H^0)^n}\geqslant\nu\|v\|^2_V \qquad \forall v\in V.$$

Заметим, что эта теорема устанавливает эквивалентность норм $\|v\|_* = (\mathscr{E}(v) + \|v\|_{(H^0)^n})^{1/2}$ и $\|v\|_V$.

Доказательство. Введем обозначения

$$\overset{k}{\varepsilon}_{\alpha\beta} = 0{,}5\,(\partial\overset{k}{u}_\beta/\partial x_\alpha + \partial\overset{k}{u}_\alpha/\partial x_\beta), \quad \overset{k}{\varepsilon}_{\alpha 3} = \partial\overset{k}{u}_3/\partial x_\alpha.$$

Тогда

$$\overset{k}{e}_{\alpha\beta}(u) = h^{2k+1}(\overset{k}{\varepsilon}_{\alpha\beta} + \overset{k}{t}_{\alpha\beta}(u)), \quad \overset{k}{e}_{\alpha 3}(u) = h^{2k+1}(\overset{k}{\varepsilon}_{\alpha 3} + \overset{k}{t}_{\alpha 3}(u)), \tag{6}$$

где $t_{\alpha i}(u)$ зависят линейно от u_i.

Рассмотрим теперь пространство $E = \{v \mid v \in (H^0)^n\}$ такое, что $\forall i, j$ $\overset{k}{e}_{ij}(v) \in H^0$. Очевидно, что последнее выполняется автоматически для $\overset{k}{e}_{33}(v)$. Можно установить, что E — гильбертово пространство с нормой $\|\cdot\|_E \equiv \|\cdot\|_*$. Справедливо тождество

$$\frac{\partial^2 \overset{k}{u}_\alpha}{\partial x_\beta \partial x_\gamma} = \frac{\partial}{\partial x_\beta}\overset{k}{\varepsilon}_{\alpha\gamma} + \frac{\partial}{\partial x_\gamma}\overset{k}{\varepsilon}_{\alpha\beta} - \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\overset{k}{\varepsilon}_{\beta\gamma}. \tag{7}$$

Если $u \in E$, то $\overset{k}{e}_{\alpha\beta}(u) \in H^0$ и, как это следует из (6), $\overset{k}{\varepsilon}_{\alpha\beta} \in H^0$; поэтому $\frac{\partial}{\partial x_\gamma}\overset{k}{\varepsilon}_{\alpha\beta} \in H^{-1}(\Omega)$. Далее, из (7) имеем

$$\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\gamma}\overset{k}{u}_\beta \in H^{-1}(\Omega) \quad \forall\,(\alpha,\ \beta,\ \gamma).$$

Таким образом $\frac{\partial}{\partial x_\beta}\overset{k}{u}_\alpha$, $\frac{\partial^2}{\partial x_\beta \partial x_\gamma}\overset{k}{u}_\alpha \in H^{-1}(\Omega)$. В этом случае, согласно ([5]) (теорема 3.2, стр. 111), $\frac{\partial}{\partial x_\beta}\overset{k}{u}_\alpha \in H^0$, откуда окончательно можно сделать заключение: если $u \in E$, то $u \in V$; очевидно и обратное. Поэтому $E = V$ алгебраически. Далее, так как включение $V \to E$ непрерывно и сюръективно, применяя теорему о замкнутом графике (см. ([6])), можно утверждать, что $\|\cdot\|_E$ и $\|\cdot\|_V$ — эквивалентные нормы.

С помощью теоремы 1 доказываются две основные теоремы.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы* 1 *и* Γ_u *имеет положительную меру. Положим* $V_0 = \{v \mid v \in V,\ v = 0$ *на* $\Gamma_u\}$.

Тогда существует такое $\nu_0 = \mathrm{const} > 0$, *что*

$$a(u, u) \geqslant \nu_0 \|u\|_V^2 \quad \forall u \in V_0.$$

Перейдем к формулировке другой основной теоремы. Сперва заметим, что в случае $\Gamma_u = 0$ $a(v, v)^{1/2}$ — полунорма в V. Перейдем к фактор-пространству $\dot{V} = V/R$, где

$$R = \{r(x) \mid r = (\overset{\circ}{r}_1,\ \overset{\circ}{r}_2,\ \overset{\circ}{r}_3,\ \overset{1}{r}_1,\ \overset{1}{r}_2,\ \overset{1}{r}_3,\ 0, \ldots, 0),\ \overset{\circ}{r}_1 = a_1 - b_3 x_2,$$
$$\overset{\circ}{r}_2 = a_2 + b_3 x_1,$$

$\overset{\circ}{r}_3 = a_3 + b_1 x_2 - b_2 x_1$, $\overset{1}{r}_1 = b_2$, $\overset{1}{r}_2 = -b_1$, $\overset{1}{r}_3 = 0$; a_i, b_i = const — произвольные$\}$, причем $b_1 = b_2 = 0$ при $N = 0$.

Определим в $\dot{V}$ соответствующим образом билинейную форму

$$a(\dot{u}, \dot{v}) = a(u, v), \quad u \in \dot{u},\ v \in \dot{v}.$$

Теорема 3. *Пусть выполнены условия теоремы* 1 *и* $\Gamma_u = 0$, *тогда*

$$a(\dot{u}, \dot{u}) \geqslant \dot{\nu}_0 \|\dot{u}\|_{\dot{V}}^2 \quad \forall \dot{u} \in \dot{V}; \quad \dot{\nu}_0 = \mathrm{const} > 0.$$

Из основных теорем, применяя известные рассуждения ([3]), следуют

Теорема 4. *Если выполнены условия теоремы 1 и Γ_u имеет положительную меру, то задача (2)—(4) разрешима единственным образом и решение $u(x)\in V_0$.*

Теорема 5. *Если выполнены условия теоремы 1, $\Gamma_u=0$ и*

$$\sum_{k=0}^{N}\int_{\Omega}\overset{k}{r}_i\overset{k}{F}_i d\Omega = 0 \quad \forall r\in R,$$

то существует единственное с точностью до слагаемой $r\in R$ решение задачи (2)—(4) $u(x)\in V$.

Институт прикладной математики
Тбилисского государственного
университета

Поступило
12 IX 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *И. Н. Векуа*, Тр. Тбилисск. математич. инст. им. А. Размадзе, т. 21, 191 (1965). [2] *И. Н. Векуа*, Теория тонких пологих оболочек переменной толщины, Тбилиси, 1965. [3] *С. Г. Михлин*, Вариационные методы в математической физике, М., 1970. [4] *А. А. Самарский*, Введение в теорию разностных схем, М., 1971. [5] *G. Duvaut, J.-L. Lions*, Les inéquations en mécanique et en phisique, Paris, 1972. [6] *Л. В. Канторович, Г. П. Акилов*, Функциональный анализ в нормированных пространствах, М., 1959.