Доклады Академии наук СССР
1974. Том 215, № 6

УДК 517.944 *МАТЕМАТИКА*

М. Г. ДЖАВАДОВ, Р. А. ЭЙЮБОВ

АСИМПТОТИКА ПО МАЛОМУ ПАРАМЕТРУ РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ, ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ В ПАРАБОЛИЧЕСКОЕ

(Представлено академиком А. Н. Тихоновым 24 X 1973)

В работе [5] Р. С. Эфендиевым построен первый член асимптотики по малому параметру решения краевой задачи для эллиптического уравнения, вырождающегося в параболическое в конечном цилиндре. При построении последующих членов асимптотики встречаются трудности в связи с наличием угловых точек. Настоящая работа посвящена построению полной асимптотики решения одной из таких задач.

Пусть $\Omega=\{0\leqslant t<\infty,\ 0\leqslant x\leqslant 1\}$ — полуполоса. В Ω ищем стремящееся к нулю при $t\to\infty$ вместе с производными первого порядка по t решение задачи

$$\mathscr{L}_\varepsilon u\equiv\varepsilon\Delta^2 u+\mathscr{L}_0 u=f, \tag{1}$$

$$\left.\frac{\partial^k u}{\partial t^k}\right|_{t=0}=0,\quad \left.\frac{\partial^k u}{\partial x^k}\right|_{x=0,x=1}=0,\quad k=0,1; \tag{2}$$

Здесь $\varepsilon>0$ — малый параметр, $f(t,x)$ — заданная гладкая функция, $\mathscr{L}_0$ — параболический оператор с постоянными коэффициентами,

$$\mathscr{L}_0\equiv\frac{\partial}{\partial t}+\mathscr{L}_1,\quad \mathscr{L}_1\equiv\sum_{i=0}^{4}a_i\frac{\partial^i}{\partial x^i},\quad \Delta^2\equiv\frac{\partial^4}{\partial t^4}+2\frac{\partial^4}{\partial t^2\,\partial x^2}+\frac{\partial^4}{\partial x^4},$$

Асимптотическое представление решения задачи (1), (2) будем искать в виде

$$u=w_0+\varepsilon^{1/3}w_1+\varepsilon^{2/3}w_2+\ldots+\varepsilon^{1/3}(v_0+\varepsilon^{1/3}v_1+\varepsilon^{2/3}v_2+\ldots). \tag{3}$$

Прежде чем приступить к построению асимптотики решения задачи (1), (2) по малому параметру, напишем второе расщепление оператора $\mathscr{L}_\varepsilon$ вблизи границы $t=0$, для чего сделаем замену переменных

$$t=\varepsilon^{1/3}\tau,\quad x=x.$$

В новых переменных оператор $\mathscr{L}_\varepsilon$ имеет вид

$$\mathscr{L}_{\varepsilon,0}\equiv\varepsilon^{-1/3}\left(\frac{\partial^4}{\partial r^4}+\frac{\partial}{\partial r}+\varepsilon^{1/3}\mathscr{L}_1+2\varepsilon^{2/3}\frac{\partial^4}{\partial t^2\,\partial x^2}+\varepsilon^{4/3}\frac{\partial^4}{\partial x^4}\right). \tag{4}$$

Расщеплениям (1) и (4) соответствуют итерационные процессы, если приближенные решения уравнений (1) и $\mathscr{L}_{\varepsilon,0}v=0$ будем искать соответственно в виде

$$w=w_0+\varepsilon^{1/3}w_1+\ldots, \tag{5}$$

$$v=\varepsilon^{1/3}(v_0+\varepsilon^{1/3}v_1+\ldots). \tag{6}$$

Подставляя выражения для w и v из (5) и (6) соответственно в уравнения (1), $\mathscr{L}_{\varepsilon,0}v=0$ и сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях по ε, имеем

$$\mathscr{L}_0 w_0 = f, \tag{7}$$

$$\mathscr{L}_0 w_1 = 0, \tag{8}$$

$$\mathscr{L}_0 w_2 = 0, \tag{9}$$

$$\mathscr{L}_0 w_k = -\Delta^2 w_{k-3}, \quad k=3, 4, \ldots \tag{10}$$

Имеем также

$$\frac{\partial^4 v_0}{\partial \tau^4} + \frac{\partial v_0}{\partial \tau} = 0, \tag{11}$$

$$\frac{\partial^4 v_k}{\partial \tau^4} + \frac{\partial v_k}{\partial \tau} = -\mathscr{L}_1 v_{k-1} - 2\frac{\partial^4 v_{k-2}}{\partial t^2\, \partial x^2} - \frac{\partial^4 v_{k-4}}{\partial x^4}, \quad k=1, 2, \ldots; \tag{12}$$

здесь предполагается, что $v_{-3}=v_{-2}=v_{-1}=0$.

Описанные выше итерационные процессы связаны между собой граничными условиями. Для выявления этой связи потребуем, чтобы

$$(w_0+\varepsilon^{1/3}w_1+\ldots)|_{t=0}+\varepsilon^{1/3}(v_0+\varepsilon^{1/3}v_1+\ldots)|_{\tau=0}=0,$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(w_0+\varepsilon^{1/3}w_1+\ldots)|_{t=0}+\frac{\partial}{\partial \tau}(v_0+\varepsilon^{1/3}v_1+\ldots)|_{\tau=0}=0,$$

$$\frac{\partial^k}{\partial x^k}[(w_0+\varepsilon^{1/3}w_1+\ldots)+\varepsilon^{1/3}(v_0+\varepsilon^{1/3}v_1+\ldots)]|_{x=0,x=1}=0, \quad k=0, 1.$$

Отсюда имеем

$$w_0|_{t=0}=0, \quad \left.\frac{\partial^k w_0}{\partial x^k}\right|_{x=0,x=1} = 0, \quad k=0, 1, \tag{13}$$

$$w_i|_{t=0}=-v_{i-1}|_{\tau=0}, \quad \left.\frac{\partial^k w_i}{\partial x^k}\right|_{x=0,x=1} = -\left.\frac{\partial^k v_{i-1}}{\partial x^k}\right|_{x=0,x=1}, \quad k=0, 1; \quad i=1, 2, \ldots \tag{14}$$

И, наконец,

$$\left.\frac{\partial v_i}{\partial \tau}\right|_{\tau=0} = -\left.\frac{\partial w_i}{\partial t}\right|_{t=0}, \quad i=0, 1, \ldots \tag{15}$$

Таким образом, члены разложений (5) и (6) являются соответствующими решениями уравнения (7)—(12), удовлетворяющими граничным условиям (13)—(15).

Задачу (7) и (13) назовем *вырожденной*. Очевидно, если $f(t, x)$ — гладкая функция, то решение вырожденной задачи будет гладкой функцией, стремящейся к нулю при $t\to\infty$ со всеми производными по t.

Зная функцию w_0, из задачи (11) и (15) при $i=0$ определяем функцию v_0 как функцию типа пограничного слоя при $t=0$.

Очевидно, характеристическое уравнение, соответствующее уравнению (11), имеет один корень $\lambda=-1$. Этот факт обеспечивает регулярность вырождения задачи. Нетрудно видеть, что

$$v_0 = \frac{\partial w_0(0, x)}{\partial t} e^{-\tau}.$$

Определив функцию v_0 из задачи (8) и (14) при $i=1$, определяем w_1. Зная функции v_0 и w_1, определяем функцию v_1 как решение типа пограничного слоя задачи

$$\frac{\partial^4 v_1}{\partial \tau^4}+\frac{\partial v_1}{\partial \tau}=-\sum_{i=0}^{4} a_i \frac{\partial^i v_0}{\partial x^i},$$

$$\left.\frac{\partial v_1}{\partial \tau}\right|_{\tau=0}=-\left.\frac{\partial w_1}{\partial t}\right|_{t=0}.$$

Можно легко показать, что решение последней задачи имеет вид

$$v_1=\left\{\frac{\partial w_1(0,x)}{\partial t}+\frac{1+\tau}{3}\mathscr{L}_1\left[\frac{\partial w_0(0,x)}{\partial t}\right]\right\}e^{-\tau}.$$

Предположим, что

$$\left.\frac{\partial^k f}{\partial x^k}\right|_{x=0,x=1}=0, \quad k=0,1.$$

Тогда функция $v_1(\tau, x)$ удовлетворяет всем граничным условиям относительно переменного x.

Продолжая процесс, определяем все функции, входящие в разложения (4) и (5).

Оказывается, накладывая некие условия согласования на функцию $f(t, x)$, можно добиться, чтобы все функции v_i, $i=0,1$, удовлетворяли граничным условиям по x.

Таким образом, будут определены все слагаемые разложения (3).

Теперь оценим остаточный член, для чего (3) запишем в виде

$$u=\sum_{i=0}^{3n}\varepsilon^{i/3}w_i+\sum_{j=0}^{3n-1}\varepsilon^{(1+j)/3}v_j+\varepsilon^n z.$$

Отсюда

$$\varepsilon^n z=u-\sum_{i=0}^{3n}\varepsilon^{i/3}w_i-\sum_{j=0}^{3n-1}\varepsilon^{(1+j)/3}v_j. \tag{16}$$

Действуя на обе части последнего равенства соответствующими расщеплениями оператора $\mathscr{L}_\varepsilon$ и учитывая уравнения, полученные из итерационных процессов, имеем краевую задачу для z:

$$\mathscr{L}_\varepsilon z=h, \tag{17}$$

$$z|_{t=0}=0, \quad \left.\frac{\partial z}{\partial t}\right|_{t=0}=\varphi(x), \tag{18}$$

$$z|_{x=0,x=1}=0, \quad \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{x=0,x=1}=0, \tag{19}$$

причем $\partial z/\partial t^k \to 0$ при $t\to\infty$, $k=0,1$; здесь h и $\varphi(x)$ суть известные функции.

Отметим, что если функция $f(t,x)$ гладкая и $\partial^k f/\partial x^k|_{x=0,\,x=1}=0$, $k=0, 1, \ldots, 2n+1$, то функция $\varphi(x)$ удовлетворяет следующим условиям: $\varphi(0)=\varphi(1)=\varphi'(0)=\varphi'(1)=0$. Учитывая это, в задаче (17)–(19) можно ввести новую функцию z_1:

$$z_1=z-te^{-t}\varphi(x). \tag{20}$$

Тогда z_1 будет стремящимся к нулю при $t\to\infty$ вместе со своими производными по t первого порядка решением задачи

$$\mathscr{L}_\varepsilon z_1 = h_1, \tag{21}$$

$$\left.\frac{\partial^k z_1}{\partial t^k}\right|_{t=0} = 0 \quad \left.\frac{\partial^k z_1}{\partial x^k}\right|_{x=0,\,x=1} = 0, \quad k=0,1. \tag{22}$$

Имеет место следующая

Теорема 1. *Для решения задачи* (21), (22) *справедлива оценка*

$$\|z_1\| \leqslant c\|h_1\|, \tag{23}$$

где норма понимается в смысле метрики пространства $L_2(\Omega)$, *а* c — *постоянная, не зависящая от* ε.

Теорема доказывается умножением обеих частей уравнения (21) на z_1 и интегрированием полученного выражения по частям с учетом граничных условий.

Зная оценку для z_1, из равенства (20) получаем оценку и для z.

Подытоживая изложенное, можно сформулировать следующее утверждение.

Теорема 2. *Если* $f(t,x)$ — *гладкая функция и* $\partial^k f/\partial x^k|_{x=0,\,x=1}=0$, $k=0,1,\ldots,6n+1$, *то для решения задачи* (1), (2) *имеет место асимптотическое представление* (3), *причем функции* w_i *определяются первым итерационным процессом,* v_i *суть функции типа пограничного слоя, определяемые вторым итерационным процессом, а* $\varepsilon^n z$ — *остаточный член, причем* z *ограничен в метрике пространства* $L_2(\Omega)$.

Институт математики и механики
Академии наук АзербССР
Баку

Поступило
3 X 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *М. И. Вишик, Л. А. Люстерник*, УМН, т. 12, в. 5 (1957). [2] *М. И. Вишик, Л. А. Люстерник*, УМН, т. 15, в. (93) (1960). [3] *М. Г. Джавадов*, ДАН, т. 144, № 2, (1962). [4] *М. Г. Джавадов*, Изв. АН Азерб. ССР, № 3 (1962). [5] *Р. С. Эфендиев*, ДАН, т. 198, № 1 (1971).