Доклады Академии наук СССР
1974. Том 216, № 5

УДК 511.6+517.54+517.56 *МАТЕМАТИКА*

В. П. ПЕТРЕНКО

РОСТ КВАЗИКОНФОРМНЫХ ЦЕЛЫХ КРИВЫХ

(Представлено академиком С. М. Никольским 18 XII 1973)

1°. Всюду далее в работе мы используем установившуюся терминологию и обозначения теории p-мерных целых кривых ($p \geqslant 2$), созданной в ([1–3]) (см. также ([4–6])). Как и в мероморфном случае, мы интересуемся, до какой степени можно ослабить требование аналитичности координат целой кривой, чтобы при этом сохранялись основные положения теории роста и распределения значений (см. ([7, 9, 10])). По-видимому, наиболее естественным подходом к решению этой проблемы является привлечение теории квазиконформных отображений М. А. Лаврентьева ([12]) (см. также ([13])).

Определение * (см. ([7])). Зависящий от комплексного параметра z p-мерный вектор

$$\mathbf{G}(z)=\{g_1(z),\ g_2(z),\ldots,g_p(z)\},\quad p\geqslant 2,$$

будем называть *p-мерной квазиконформной* (*Q-квазиконформной*) *целой кривой*, если ее координаты $g_n(z)$ допускают представление

$$g_n(z)=h_n(\varkappa(z)),\quad n=1,\ 2,\ 3,\ldots,p,$$

где $w=\varkappa(z)$ — квазиконформное (Q-квазиконформное) отображение всей z-плоскости на всю w-плоскость ($\varkappa(\infty)=\infty$), а $h_n(w)$ — целые функции такие, что

$$\mathbf{H}(w)=\{h_1(w),\ h_2(w),\ldots,h_p(w)\}$$

— обычная p-мерная целая кривая в w-плоскости.

Таким образом, 1-квазиконформная целая кривая является обычной целой кривой. Определим теперь характеристику роста квазиконформной целой кривой. Рассмотрим p-мерный вектор

$$\mathbf{a}(\alpha)=\mathbf{a}(\alpha_1,\ \alpha_2,\ldots,\alpha_p)=\{e^{-i\alpha_1},\ e^{-i\alpha_2},\ldots,e^{-i\alpha_p}\},$$

где $0\leqslant\alpha_n\leqslant 2\pi$, $n=1,\ 2,\ 3,\ldots,p$. Пусть $n(r,\ \mathbf{a}(\alpha),\mathbf{G})$ обозначает число корней (с учетом кратности) скалярного произведения

$$(\mathbf{G}(z)\cdot\mathbf{a}(\alpha))=\sum_{k=1}^{p}g_k(z)\cdot e^{i\alpha_k},$$

попавших в круг $\{z:|z|\leqslant r\}$ и (см. ([9, 10]))

$$N(r,\mathbf{a}(\alpha),\mathbf{G})=\int_1^r n(t,\mathbf{a}(\alpha),\mathbf{G})\,d\ln t.$$

Характеристикой квазиконформной (Q-квазиконформной) целой кривой $\mathbf{G}(z)$ назовем величину

$$T(r,\mathbf{G})=\frac{1}{(2\pi)^{p-1}}\int_0^{2\pi}\ldots\int_0^{2\pi}N(r,\mathbf{a}(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{p-1},0),\mathbf{G})\,d\alpha_1\ldots d\alpha_{p-1}.\quad(1)$$

* Близкое определение внутреннего отображения $C\to C^p$ было дано в ([8]).

С помощью этой характеристики естественным образом вводим порядок ρ и нижний порядок λ для $\mathbf{G}(z)$. Можно показать, что для целых кривых характеристика (1) отличается от ее неванлинновской характерстики (см., например, ([5]), стр. 538) на несущественное слагаемое.

Среднее отклонение $m(r, \mathbf{a}, \mathbf{G})$ квазиконформной целой кривой от вектора $\mathbf{a}$ определяем так же, как и в классическом случае (см. ([1])), а ее максимальное отклонение от вектора $\mathbf{a}$ определим так (см. ([5])):

$$L(r,\mathbf{a},\mathbf{G}) = \max_{|z|=r} \ln \frac{\|\mathbf{G}(z)\|\cdot\|\mathbf{a}\|}{|(\mathbf{G}(z)\cdot\mathbf{a})|}.$$

Дефектом квазиконформной целой кривой $\mathbf{G}(z)$ относительно вектора $\mathbf{a}$ назовем величину

$$\delta(\mathbf{a},\mathbf{G}) = \varliminf_{r\to\infty} \frac{m(r,\mathbf{a},\mathbf{G})}{T(r,\mathbf{G})},$$

а величиной ее отклонения от вектора $\mathbf{a}$ назовем величину

$$\beta(\mathbf{a},\mathbf{G}) = \varliminf_{r\to\infty} \frac{L(r,\mathbf{a},\mathbf{G})}{T(r,\mathbf{G})}.$$

Пусть $\Omega_A(\mathbf{G}) = \{\mathbf{a}\in A:\ \beta(\mathbf{a},\ \mathbf{G})>0\}$ — множество положительных отклонений $\mathbf{G}(z)$ относительно фиксированной допустимой системы векторов * A.

2°. Основные результаты.

Теорема 1. *Если Q-квазиконформная целая кривая $\mathbf{G}(z)$ имеет конечный нижний порядок λ, то:*

а) *множество $\Omega_A(\mathbf{G})$ не более чем счетно;*

б) *справедлива оценка*

$$\sum_{\mathbf{a}\in A} \beta^{q}(a, G) \leqslant C(Q, p, \lambda),$$

где $C(Q,\ p,\ \lambda)$ — положительная постоянная, зависящая лишь от коэффициента квазиконформности Q, размерности p и нижнего порядка λ.

Теорема 2. *Для любого Q, $1\leqslant Q<\infty$, существует допустимая система векторов A и Q-квазиконформная целая кривая $\mathbf{G}(z)$ бесконечного нижнего порядка, для которой множество $\Omega_A(\mathbf{G})$ не является счетным.*

3°. Обобщения. Пусть $f(z,\ w)$ — целая функция двух комплексных переменных, причем $f(z,\ w)\not\equiv\mathrm{const}$ для каждого фиксированного w. Положим для нее (w фиксировано)

$$T(r_1,r_2,f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln M(r_1e^{i\theta}, r_2, f)\,d\theta,$$

$$m(r,w,f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln\frac{M(re^{i\theta}, 1+|w|)}{|f(re^{i\theta}, w)|}\,d\theta,$$

$$L(r,w,f) = \max_{|z|=r} \ln\frac{M(z, 1+|w|)}{|f(z,w)|}$$

где

$$\ln M(z,\ R) = \max_{|w|=R} \ln|f(z,\ w)|.$$

* Система векторов A называется допустимой, если любые p различных векторов этой системы линейно независимы.

Определение. Будем говорить, что функция $f(z, w) \in M$, если для любого $k \geqslant 1$

$$\varlimsup_{r\to\infty} \frac{T(1, r^k, f)}{T(r, 1, f)} = C(k, f) < \infty.$$

Если $f(z, w) \in M$, то ее характеристику роста определим так:

$$T(r, f) = T(r, 1, f).$$

Дефектом $f(r, w)$ и величиной ее отклонения относительно w назовем соответственно величины

$$\delta(w, f) = \varliminf_{r\to\infty} \frac{m(r, w, f)}{T(r, f)}, \quad \beta(w, f) = \varliminf_{r\to\infty} \frac{L(r, w, f)}{T(r, f)}.$$

Естественным образом определяем множество дефектных значений и множество ее положительных отклонений:

$$D(f) = \{w:\ \delta(w, f) > 0\}, \quad \Omega(f) = \{w:\ \beta(w, f) > 0\}.$$

Теорема 3. *Если $f(z, w) \in M$ и имеет конечный нижний порядок λ то для любого фиксированного w*

$$\delta(w, f) \leqslant 1, \quad \beta(w, f) \leqslant \begin{cases} \pi\lambda / \sin \pi\lambda, & 0 \leqslant \lambda < 0{,}5, \\ \pi\lambda, & \lambda \geqslant 0{,}5, \end{cases} \tag{2}$$

и плоская мера множества $\Omega(f)$ равна нулю.

Существуют примеры функций из класса M, для которых в (2) достигается равенство для счетного множества значений w. Вероятно, для целой функции из класса M множество $\Omega(f)$ всегда имеет нулевую емкость. Оценка для $\beta(w, f)$ представляет собой некоторый аналог известной гипотезы Пэйли ([14]), которая была доказана Н. В. Говоровым ([11]). Дальнейшие обобщения см. в ([15]). Результаты теоремы 3 естественным образом распространяются на целые функции n, $n > 2$, комплексных переменных.

4°. Об исключительности множества $\Omega(\mathbf{G})$. Выберем две фиксированные квадратные матрицы $a = \{a_{n,j}\}_{n,j=1}^{p}$ и $d = \{d_{n,j}\}_{n,j=1}^{p}$; при этом будем считать, что $\det a \neq 0$. Этот набор будем далее обозначать $A(a, d)$. Положим для каждого $\mathbf{w} = \{w_n\}_{n=1}^{p} \in C^p$

$$\mathbf{b} = \left\{ \zeta_k = \zeta_k(w_1, w_2, \ldots, w_p) = \sum_{n=1} (a_{n,k} \cdot w_n + d_{n,k}) \right\}_{k=1}^{p}.$$

Пусть E — произвольное ограниченное замкнутое множество из C^p и

$$E(a, d) = \{\mathbf{w} = (w_n)_{n=1}^{p}:\ b = (\zeta_k)_{k=1}^{p} \in E\}.$$

Обозначим через $E_n(a, d)$ проекцию множества $E(a, d)$ на координатную плоскость w_n и назовем p-емкостью множества E величину

$$C_p(E) = \operatorname*{Sup}_{A(a,\, d)} \ \min_{1 \leqslant n \leqslant p} \operatorname{Cap}_2 E_n(a, d),$$

где Sup берется по всевозможным наборам $A(a, d)$. Для произвольной p-мерной целой кривой $\mathbf{G}(z)$ внутренняя p-емкость множества $\Omega(\mathbf{G})$ равна нулю без дополнительного предположения о принадлежности векторов фиксированной допустимой системе. Множество $E(a, d)$ можно рассматривать как сечение множества E p-мерной аналитической плоскостью.

Представляет интерес исследовать структуру сечений множества $\Omega(G)$ k-мерными аналитическими плоскостями $1 \leqslant k \leqslant p-1$, коэффициенты которых принадлежат некоторой фиксированной допустимой системе векторов.

Харьковский государственный университет
им. А. М. Горького

Поступило
18 XII 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *H. Weyl,* Meromorphic Functions and Analytic Curves, Princeton, 1943. [2] *L. Ahlfors,* Acta Soc. Sci. Fenn., v. 3, № 4, 1 (1941). [3] *H. Cartan,* Mathematica, v. 7, № 5 (1933). [4] *А. А. Гольдберг,* Доп. к кн. Г. Виттиха, Новейшие исследования по однозначным аналитическим функциям, М., 1960. [5] *В. П. Петренко,* ДАН, т. 207, № 3, 537 (1972). [6] *В. П. Петренко, М. Хуссайн,* Изв. АН СССР, сер. матем., т. 37, № 2, 466 (1973). [7] *В. П. Петренко,* Сибирск. матем. журн., т. 15, № 1, 83 (1974). [8] *N. Petridis,* C. R., v. 261, № 7, 1581 (1965). [9] *В. П. Петренко,* Сибирск. матем. журн., т. 13, № 4, 823 (1972). [10] *В. П. Петренко,* ДАН, т. 196, № 1, 50 (1971). [11] *Н. В. Говоров,* Функц. анализ и его прилож., т. 3, в. 2, 41 (1969). [12] *М. А. Лаврентьев,* Матем. сборн., т. 42, № 4, 407 (1935). [13] *Л. И. Волковыский,* Квазиконформные отображения, Львов, 1954. [14] *R. E. C. Paley,* Proc. Cambridge Phil. Soc., v. 28, 262 (1932). [15] *В. П. Петренко,* Изв. АН СССР, сер. матем., т. 33, № 2, 414 (1969).