Доклады Академии наук СССР
1974. Том 216, № 5

УДК 517.56 *МАТЕМАТИКА*

О. Б. СИДОНСКИЙ

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ СООТНОШЕНИЯ В ЧАСТНЫХ РАЗНОСТЯХ ДЛЯ ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 6 XII 1973)

Выводятся функциональные соотношения с разностными операторами для гипергеометрической функции Гаусса, функции Аппеля четвертого рода и обобщенной гипергеометрической функции F_C Лауричелла от трех переменных. Операторы функциональных соотношений принадлежат классу разностных операторов с постоянными коэффициентами.

Синтез разностных операторов в соотношениях для гипергеометрических функций основан на составлении произведения сумм операторов сдвига, т. е. осуществляется противоположным путем по отношению к обычно применяемому расщеплению разностных операторов [1]. Вывод функциональных соотношений в частных разностях опирается на преобразование Меллина произведения цилиндрических функций [3–5].

1. Рассмотрим произведение функций

$$\Phi=\Phi(z,\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)=z^{\alpha_1}\prod_{k=2}^{n}F_k(z,\alpha_k),$$

где для каждой из функций $F_k(z,\alpha_k)$ имеет место пара функциональных соотношений вида ($c_k=\mathrm{const}$)

$$\frac{\partial}{\partial z}[z^{\pm\alpha_k}F_k(z,\alpha_k)]=c_kz^{\pm\alpha_k}F_k(z,\alpha_k\mp1). \tag{1}$$

Следствием (1) для произведения Φ являются два выражения

$$\frac{\partial}{\partial z}\Phi=[(\alpha_1\mp\alpha)E_{\alpha_1}^{-1}+A_{\mp}]\Phi, \tag{2}$$

где операторы A_+, A_- представляют собой суммы операторов сдвига E

$$E_{\alpha_k}^{\pm1}F_k(z,\alpha_k)=F_k(z,\alpha_k\pm1)$$

вида

$$A_{\pm}=\sum_{k=2}^{n}c_kE_{\alpha_k}^{\pm1},\quad \alpha=\alpha_2+\alpha_3+\ldots+\alpha_n.$$

Предположим, что оператор T_z удовлетворяет равенству

$$T_z\left[\frac{\partial}{\partial z}\Psi(z)\right]=0, \tag{3}$$

и введем функцию $\varphi(\beta)$, для которой имеет место функциональное соотношение

$$\varphi(\beta+2)=\beta\varphi(\beta). \tag{4}$$

Действуя оператором T_z на обе части выражения (2), найдем пару соотношений

$$(E_{\alpha_1}^{-1}-A_{\mp})S=0 \tag{5}$$

для функции S, связанной с произведением Φ равенством

$$S=S(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)=\varphi(1-\alpha_1+\alpha)\varphi(1-\alpha_1-\alpha)T_z\Phi(z, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n).$$

Нетрудно видеть, что следствием пары соотношений (5) является выражение

$$(E_{\alpha_1}{}^{-2}-A_+A_-)S=0, \tag{6}$$

которое содержит произведение сумм операторов сдвига A_+A_-.

2. Положим $\beta_1=\alpha_1/2$, $\beta=\alpha/2$; $\beta_k=\beta-\alpha_k$, $1<k<n$, и введем функцию H, связанную с функцией S:

$$H\equiv H(\beta, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{n-1})=c^{\alpha_1}S(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n),$$
$$c=c_2+c_3+\ldots+c_n.$$

Соотношение (6) при некоторых n влечет для функции H равенство вида

$$RH=0, \tag{7}$$

где R — разностный оператор.

Пусть $n=3$. Тогда оператор

$$R=\nabla_{\beta_1}+r\Delta_{\beta_2}\nabla_{\beta_2}, \quad r=c_2c_3/c^2, \tag{8}$$

где (I — единичный оператор) $\Delta=E-I$, $\nabla=I-E^{-1}$, представляет собой разностный аналог дифференциального оператора

$$L=\partial/\partial t+a\,\partial^2/\partial x^2.$$

Положим $n=4$. Оператор

$$R=\nabla_{\beta_1}+r_1\Delta_{\beta_2}\nabla_{\beta_2}+r_2(\Delta_{\beta_2}\nabla_{\beta_3}+\nabla_{\beta_2}\Delta_{\beta_3})+r_3\Delta_{\beta_3}\nabla_{\beta_3},$$
$$r_1=c_2(c_3+c_4)/c^2, \quad r_2=-c_2c_3/c^2, \; r_3=c_3(c_2+c_4)/c^2,$$

принимает вид разностного аналога оператора

$$L=\frac{\partial}{\partial t}+a\frac{\partial^2}{\partial x^2}+2b\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}+c\frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

Пусть $n=5$. Тогда оператор

$$\begin{gathered}R=\nabla_{\beta_1}+r_1\Delta_{\beta_2}\nabla_{\beta_2}+r_2\Delta_{\beta_3}\nabla_{\beta_3}+r_3\Delta_{\beta_4}\nabla_{\beta_4}+r_4(\Delta_{\beta_2}\nabla_{\beta_3}+\nabla_{\beta_2}\Delta_{\beta_3})+\\+r_5(\Delta_{\beta_2}\nabla_{\beta_4}+\nabla_{\beta_2}\Delta_{\beta_4})+r_6(\Delta_{\beta_3}\nabla_{\beta_4}+\nabla_{\beta_3}\Delta_{\beta_4}),\\ r_1=c_2(c_3+c_4+c_5)/c^2, \; r_2=c_3(c_2+c_4+c_5)/c^2,\\ r_3=c_4(c_2+c_3+c_5)/c^2, \quad r_4=-c_2c_3/c^2, \quad r_5=-c_2c_4/c^2,\\ r_6=-c_3c_4/c^2,\end{gathered} \tag{9}$$

является аналогом оператора

$$L=\frac{\partial}{\partial t}+a\frac{\partial^2}{\partial x^2}+b\frac{\partial^2}{\partial y^2}+c\frac{\partial^2}{\partial z^2}+2d\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}+2e\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial z}+2f\frac{\partial^2}{\partial y\,\partial z}$$

Соотношение (7) для оператора (9) допускает другую интерпретацию. Определим диагональные разностные операторы по аналогии с произведением $\Delta_\alpha\nabla_\alpha$ равенствами

$$\lhd_\alpha\rhd_\beta=E_\alpha E_\beta-2I+E_\alpha{}^{-1}E_\beta{}^{-1}, \quad \rhd_\alpha\lhd_\beta=E_\alpha E_\beta{}^{-1}-2I+E_\alpha{}^{-1}E_\beta$$

и запишем оператор R в виде

$$\begin{gathered}R=\nabla_{\beta_1}+\hat r_1\lhd_{\gamma_2}\rhd_{\gamma_3}+\hat r_2\rhd_{\gamma_2}\lhd_{\gamma_3}+\hat r_3\lhd_{\gamma_2}\rhd_{\gamma_4}+\\+\hat r_4\lhd_{\gamma_2}\rhd_{\gamma_4}+\hat r_5\lhd_{\gamma_3}\rhd_{\gamma_4}+\hat r_6\rhd_{\gamma_3}\lhd_{\gamma_4},\\ \gamma_2=\beta_3+\beta_4-\beta, \quad \gamma_3=\beta-\beta_2-\beta_4, \quad \gamma_4=\beta-\beta_2-\beta_3,\\ \hat r_1=c_2c_3/c^2, \quad \hat r_2=c_4c_5/c^2, \quad \hat r_3=c_2c_4/c^2, \quad \hat r_4=c_3c_5/c^2,\\ \hat r_5=c_2c_5/c^2, \quad \hat r_6=c_3c_4/c^2.\end{gathered} \tag{10}$$

Соотношение (7) с оператором (10) совпадает по форме — с точностью до коэффициентов — с уравнением случайных блужданий на гранецентрированной кубической решетке [2].

3. В качестве функций $F_k(z, \alpha_k)$ можно выбрать цилиндрические функции от мнимого аргумента

$$F_I(z, \alpha)=I_\alpha(cz), \quad F_K(z, \alpha)=e^{i\pi\alpha}K_\alpha(cz). \tag{11}$$

Эти функции удовлетворяют соотношению (1) из работы [3].

В качестве оператора T_z можно взять интегральный оператор (функционал) вида

$$T_z\Psi(z)=\int\limits_0^\infty \Psi(z)\,dz, \tag{12}$$

если интеграл (12) существует и

$$\lim_{z\to+0}\Psi(z)=0. \tag{13}$$

Интегрированием по частям нетрудно показать, что для функционала T_z имеет место равенство (3). Условие (13) для функций (11) выполнено при $\operatorname{Re}(\alpha_1\pm\alpha_2\pm\alpha_3\pm\ldots\pm\alpha_n)>0$.

Функциональное уравнение (4) для $\varphi(\beta)$ по существу совпадает с функциональным соотношением для гамма-функции Эйлера и можно положить $\varphi(2\beta)=2^\beta\Gamma(\beta)$.

4. Выразим H через гипергеометрические функции, полагая $F_2(z, \alpha_2)=$ $=F_K(z, \alpha_2)$ и обозначая выбор $F_k(z, \alpha_k)$ при $k>2$ в виде $H=H_{m_3m_4\ldots m_n}$, где $m_k=I$, если $F_k(z, \alpha_k)=F_I(z, \alpha_k)$, или $m_k=K$, если $F_k(z, \alpha_k)=F_K(z, \alpha_k)$.

Положим $n=3$. Тогда $H(\beta, \beta_1, \beta_2)$ выражается через гипергеометрическую функцию Гаусса [3]:

$$\begin{gathered}
H_I=\frac{\pi e^{i\pi(\beta-\beta_2)}}{\cos\pi(\beta+\beta_1)}\frac{c^{2\beta_1}c_3^{\beta_2+\beta}}{c_2^{2\beta_1+\beta_2+\beta+1}}\mathrm{B}\left(\frac{1}{2}+\beta_1+\beta_2,\frac{1}{2}-\beta_1+\beta_2\right)\times\\
\times{}_2F_1\left(\frac{1}{2}+\beta_1+\beta_2,\frac{1}{2}+\beta_1+\beta,1+\beta_2+\beta,c_3^2/c_2^2\right);\\
H_K=\frac{\pi^2e^{2i\pi\beta}}{\cos\pi(\beta+\beta_1)\cos\pi(\beta-\beta_1)}\frac{c^{2\beta_1}c_3^{2\beta_2+\beta}}{2c_2^{2\beta_1+\beta_2+\beta+1}}\mathrm{B}\left(\frac{1}{2}+\beta_1+\beta_2,\frac{1}{2}+\beta_1-\beta_2\right)\times\\
\times{}_2F_1\left(\frac{1}{2}+\beta_1+\beta_2,\frac{1}{2}+\beta_1+\beta,1+2\beta_1,1-c_3^2/c_2^2\right),
\end{gathered}\tag{14}$$

где $\mathrm{B}(p, q)$ — бета-функция Эйлера.

Пусть $n=4$. Тогда H_{II} может быть выражена через обобщенную гипергеометрическую функцию Аппеля от двух переменных четвертого рода [4]:

$$\begin{gathered}
H_{II}=\frac{\pi e^{i\pi(\beta-\beta_2)}}{\cos\pi(\beta+\beta_1)}\frac{c^{2\beta_1}c_3^{\beta-\beta_3}c_4^{\beta_2+\beta_3}}{c_2^{2\beta_1+\beta_2+\beta+1}}\frac{\Gamma(^1/_2+\beta_1+\beta_2)\Gamma(^1/_2-\beta_1+\beta)}{\Gamma(1+\beta-\beta_3)\Gamma(1+\beta_2+\beta_3)}\times\\
\times F_4\left(\frac{1}{2}+\beta_1+\beta_2,\frac{1}{2}+\beta_1+\beta,1+\beta-\beta_3,1+\beta_2+\beta_3,c_3^2/c_2^2,c_4^2/c_2^2\right).
\end{gathered}$$

Положим $n=5$. Тогда H_{III} можно записать, используя гипергеометрическую функцию F_c Лауричелла от трех переменных ([5]):

$$H_{III}=\frac{\pi e^{i\pi(\beta-\beta_2)}}{\cos\pi(\beta+\beta_1)}\frac{c^{2\beta_1}c_3^{\beta-\beta_3}c_4^{\beta-\beta_4}c_5^{\beta_2+\beta_3+\beta_4-\beta}}{c_2^{2\beta_1+\beta_2+\beta+1}}\times$$
$$\times\frac{\Gamma(^1/_2+\beta_1+\beta_2)\Gamma(^1/_2-\beta_1+\beta)}{\Gamma(1+\beta-\beta_3)\Gamma(1+\beta-\beta_4)\Gamma(1+\beta_2+\beta_3+\beta_4-\beta)}F_c\left(\frac{1}{2}+\beta_1+\beta_2,\ \frac{1}{2}+\beta_1+\beta,\ 1+\right.$$
$$\left.+\beta-\beta_3,\ 1+\beta-\beta_4,\ 1+\beta_2+\beta_3+\beta_4-\beta,\ c_3^2/c_2^2,\ c_4^2/c_2^2,\ c_5^2/c_2^2\right).$$

Выражение (7) для оператора (8) обобщает рекуррентное соотношение с постоянными коэффициентами для $\mathfrak{B}_{mn}{}^l(\operatorname{ch}\tau)$ — функций Н. Я. Виленкина ([5]). Функция H_I при целочисленных β, β_2 отличается несущественным множителем от $\mathfrak{B}$-функции. Соотношение (7), (8) для функций (14) включает выведенное нами ранее функциональное уравнение для функций Лежандра первого и второго рода ([7–9]).

Автор искренне признателен Н. Я. Виленкину за обсуждение работы.

Научно-исследовательский институт
прикладной математики и механики
при Томском государственном университете
им. В. В. Куйбышева

Поступило
5 XI 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *Н. Н. Яненко*, Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. «Наука», 1967. [2] *Э. Монтролл*, В сборн. Прикладная комбинаторная математика, М., 1968. [3] *Г. Бейтман, А. Эрдейи*, Высшие трансцендентные функции, т. 2, «Наука», 1966, стр. 90, 107. [4] *Г. Бейтмен, А. Эрдейи*, Таблицы интегральных преобразований. т. 2, «Наука», 1970, стр. 268. [5] *R. K. Saxena*, Monatsh. Math., v. 70, 161 (1966). [6] *Н. Я. Виленкин*, Специальные функции и теория представлений групп, «Наука», 1965, стр. 330. [7] *О. Б. Сидонский*, ДАН, т. 205, № 4, 791 (1972). [8] *О. Б. Сидонский*, Тр. III Казахстанск. конфер. по матем. и механике, Алма-Ата, 1970, стр. 170. [9] *О. Б. Сидонский*, Тр. н.-и. инст. прикл. матем. и мех., т. 1, Томск, 1972.