Доклады Академии наук СССР
1974. Том 216, № 5

УДК 517.28 *МАТЕМАТИКА*

С. В. ХАБИРОВ

О НЕКОТОРЫХ КВАЗИКОНФОРМНЫХ ОТОБРАЖЕНИЯХ, ПРИНАДЛЕЖАЩИХ ОДНОЙ ПСЕВДОГРУППЕ ЛИ

(Представлено академиком М. А. Лаврентьевым 3 VIII 1973)

Рассматриваются диффеоморфизмы q: $\Omega\to\Omega_0$ ограниченных областей Ω эвклидового пространства R^3, действующих по формуле

$$(x,\ y,\ z)\in\Omega,\quad q(x,\ y,\ z)=(u,\ v,\ w)\in\Omega_0. \tag{1}$$

Используется следующая интегральная формулировка свойства квазиконформности, эквивалентная обычному определению [1]. Пусть $|\Omega|$ — объем области Ω, $d=u_x^2+u_y^2+u_z^2+v_x^2+v_y^2+v_z^2+w_x^2+w_y^2+w_z^2$,

$$J=\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)},\quad Q=\frac{d}{3J^{2/3}},\quad F[u,v,w]=\frac{1}{|\Omega|}\iiint\limits_{\Omega} Q\,dx\,dy\,dz. \tag{2}$$

Если $1\leqslant F[u,\ v,\ w]\leqslant K<\infty$, то отображение (1) называется K-квазиконформным.

Минимальным значениям K соответствуют экстремальные отображения. Существование таких отображений в множестве непрерывных квазиконформных отображений доказывалось многими авторами для определенных областей. В работе [2] этот вопрос рассматривался для двух круговых торов. Там же можно найти ссылки на работы, где изучались отображения шара на шар, двугранного угла на двугранный угол, конуса на цилиндр и т. д.

В настоящей работе разыскиваются отображения осесимметричных областей, экстремальные в классе гладких отображений, образующих псевдогруппу Ли G, задаваемую дифференциальными уравнениями

$$u_x=v_y,\quad v_x=-u_y,\quad w_x=0,\quad w_y=0.$$

Общее решение этих уравнений имеет вид $\zeta=u+iv=\zeta(\alpha,\ z)$, $\alpha=x+iy$, $w=w(z)$, где $\zeta(\alpha,\ z)$ — аналитическая функция комплексного переменного α так, что вместо (1) можно написать $q(\alpha,z)=(\zeta,\ w)$.

1. Сначала рассмотрим области Ω «цилиндрического» типа: проекция Ω на ось z есть интервал $0<z<z_0$, пересечение Ω с каждой плоскостью $z=\text{const}$, $0<z<z_0$, есть непустая односвязная ограниченная плоская область Ω_z с отличной от нуля площадью. Тогда преобразованиями из G область Ω может быть отображена на цилиндр Ω_0 единичного радиуса и высоты h. При этом в качестве $w=w(z)$ можно взять произвольную гладкую возрастающую функцию, лишь бы $w(0)=0$, $w(z_0)=h$. Если $\zeta(\alpha,\ z)$ — какое-то отображение Ω_z на $|\zeta|<1$, то $q(\alpha,\ z)=(\eta(\alpha,\ z),\ w(z))$, где

$$\eta(\alpha,z)=e^{ia(z)}\frac{\zeta(\alpha,z)-\beta(z)}{1-\overline{\beta(z)}\zeta(\alpha,z)},\quad \beta=b+ic,\quad |\beta|<1, \tag{3}$$

есть произвольное отображение Ω на Ω_0 из псевдогруппы G.

Итак, общее отображение Ω на Ω_0 из G зависит от четырех функций одного действительного переменного.

Для отыскания экстремального отображения из псевдогруппы G решается вариационная задача, полученная из (2) подстановкой (3).

Рассмотрим осесимметричные области с осью z и ограничимся случаем $\beta=0$. Тогда функционал F примет вид

$$F[a,w]=\int_0^{z_0}\Phi(z,a',w']dz, \tag{4}$$

$$\Phi(z,a',w')=\frac{\sigma+\varphi a'+\varphi a'^2+\tau w'^2}{w'^{2/3}},$$

σ, ψ, φ, τ — функции переменной z, которые определяются по Ω, Ω_z и функции $\zeta(\alpha,z)$.

Краевые условия $w(0)=0$, $w(z_0)=h$. Так как экстремальное отображение определяется с точностью до вращения области вокруг оси z, то можно принять $a(0)=0$; значение $a(z_0)$ остается произвольным. Уравнения Эйлера функционала (4) имеют вид

$$a'=-{}^1/_2\psi/\varphi,\quad 2\tau w'^2=Aw'^{5/3}+\sigma-{}^1/_4\psi^2/\varphi$$

(A — произвольная постоянная) с краевыми условиями

$$a(0)=0,\quad w(0)=0,\quad w(z_0)=h.$$

Теорема. *Всякая гладкая осесимметричная область Ω «цилиндрического» типа может быть отображена на цилиндр Ω_0 единственным образом (с точностью до вращения) гладким отображением из псевдогруппы G, дающим сильный минимум функционалу* (4).

Пример. Экстремальное отображение цилиндра радиуса R и высоты H на цилиндр радиуса 1 и высоты 1 будет иметь вид

$$u=x/R,\quad v=y/R,\quad w=z/H.$$

Минимальное значение константы квазиконформности

$$K_{\min}={}^1/_3[2(H/R)^{2/3}+(R/H)^{4/3}].$$

2. Далее рассмотрим гладкие области Ω типа «шара»: проекция на ось z есть интервал $-p<z<p$, пересечение Ω с каждой плоскостью $z=\mathrm{const}$, $-p<z<p$, есть непустая односвязная ограниченная плоская область Ω_z с площадью, стремящейся к нулю при $|z|\to p$. Преобразованиями из псевдогруппы G ее можно отобразить на единичный шар S. Если $q(\alpha,z)=(\zeta(\alpha,z),\bar z(z))$ есть какое-то отображение Ω на S, то $q(\alpha,z)=(\eta(\alpha,z),w(z))$, где

$$\eta(\alpha,z)=e^{ia(z)}\frac{(1-w^2(z))^{1/2}}{(1-\bar z^2(z))^{1/2}}\frac{\zeta(\alpha,z)-\beta(z)}{1-[\overline{\beta(z)}\zeta(\alpha,z)]/(1-\bar z^2(z))},$$

$$\beta=b+ic,\quad |\beta|<(1-\bar z^2)^{1/2},$$

есть произвольное отображение Ω на S из G; здесь a, β, w — произвольные функции, как и в случае цилиндра, с условиями $w(-p)=-1$, $w(p)=1$. Для определения экстремального отображения осесимметричных областей, ограничиваясь случаем $\beta=0$, будем иметь вариационную задачу, полученную из функционала (2) подстановкой $\eta=e^{i\alpha}(1-w^2)^{1/2}\xi$, $\xi=\zeta(1-\bar z^2)^{-1/2}$. Значение функционала не меняется при преобразовании $\hat z=z/E$, $\hat\alpha=\alpha/E$, $\hat w=w/E$, $\hat\eta=\eta/E$. При $E=p$ получим исходную вариационную задачу с $p=1$. Уравнение Эйлера для функции $a(z)$ будет точно таким же, как в случае области типа «цилиндра», а для функции $w(z)$ имеет вид

$$w''=\frac{w'}{1-w^2}\,\frac{a_1(1-w^2)^3+b_1w(1-w^2)^2w'+c_1(1-w^2)w'^2+d_1ww'^3}{a_2(1-w^2)^2+b_2w(1-w^2)w'+c_2w'^2} \tag{5}$$

с краевыми условиями $w(-1)=-1$, $w(1)=1$, где a_1, b_1, c_1, d_1, a_2, b_2, c_2 — функции переменных z, w, которые определяются по Ω, Ω_z и функции $\xi(\alpha, z)$.

Если исходная область была единичным шаром, то решением задачи (5) будет $w=z$. Рассмотрим области Ω, близкие к шару. Обозначим $(x^2+y^2)^{1/2}=r$. Пусть уравнение $r=(1-z^2)^{1/2}(1-\gamma(z))$ задает область Ω $(\gamma(-1)=\gamma(1)=0$, $\gamma(z)$ мало вместе с производными). Будем искать приближенное решение задачи (5) в виде $w(z)=z+\delta(z)$. Потребуем, чтобы $\delta(z)$ удовлетворяла линеаризованному уравнению, которое получится из (5), если в качестве начального отображения взять $\bar{z}=z$, $\zeta=\alpha/(1+\gamma)$. Это приводит к задаче

$$L\delta(z)=m(z), \quad \delta(-1)=\delta(1)=0, \tag{6}$$

$$L\delta=(8-5z^2)\delta''-10z\delta'+\frac{2(4-5z^2)}{1-z^2}\delta,$$

$$m(z)=-3z(1-z^2)\gamma''+4(5z^2-2)\gamma'+24z\gamma;$$

оператор L самосопряженный.

Сопряженная однородная задача ([3]) имеет вид (6) с $m(z)\equiv 0$. Для ее анализа делаем замену $t=1-z^2$, $y(t)=\delta(z)$. В результате получим

$$y''+\left(\frac{1}{2}\frac{1}{t-1}+\frac{1}{t+{}^3/_5}\right)y'+\left(-\frac{1}{6}\frac{1}{t}-\frac{1}{4}\frac{1}{t-1}+\frac{5}{12}\frac{1}{t+{}^3/_5}\right)y=0, \qquad y(0)=0. \tag{7}$$

В окрестности $t=0$ из двух фундаментальных решений можно выбрать только одно, удовлетворяющее краевому условию. Оно имеет вид $y^{(0)}(t)=$ $=t\sum_{k=0}^{\infty}c_k t^k$. Отсюда легко видеть, что решение сопряженной однородной задачи четно. Аналитически продолжим $y^{(0)}(t)$ в окрестность $t=1$. В силу четности решение там будет иметь вид $y^{(1)}(t)=\sum_{k=0}^{\infty}d_k(1-t)^k$. Таким образом, существует одно регулярное четное решение сопряженной задачи. Обозначим его $y(t)$. Можно проверить, что необходимым и достаточным условием разрешимости задачи (6) будет

$$\int_{-1}^{1}\omega(z)m(z)\,dz=0, \tag{8}$$

где $\omega(z)=y(1-z^2)$.

Пусть при выполнении (8) $\delta_0(z)$ будет частным решением задачи (6). Тогда общее решение имеет вид $\delta(z)=\delta_0(z)+Cy(1-z^2)$, где C — произвольная постоянная.

Заметим, что для симметричных относительно плоскости $z=0$ областей условие (8) выполнено тождественно. Действительно, тогда функция $\gamma(z)$ будет четной, а $m(z)$ — нечетной. Для областей с функцией $\gamma(z)$, не являющейся четной, может случиться, что (8) не выполняется, тогда задача (6) не разрешима.

Автор благодарен Л. В. Овсянникову за обсуждение темы данной работы и замечания, сделанные в процессе ее выполнения.

Институт гидродинамики
Сибирского отделения Академии наук СССР
Новосибирск

Поступило
27 VII 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *М. А. Лаврентьев*, Сибирск. матем. журн., т. 5, № 3, 596 (1964). [2] *Ф. В. Геринг*, Некоторые проблемы математики и механики (К семидесятилетию М. А. Лаврентьева), «Наука», 1970. [3] *Э. Л. Айнс*, Обыкновенные дифференциальные уравнения, Харьков, 1939.