Доклады Академии наук СССР
1974. Том 216, № 5

УДК 517.51:519.53 МАТЕМАТИКА

Б. С. ЦИРЕЛЬСОН

О СУММЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ И НЕПРЕРЫВНОМ ПО МЕРЕ ОПЕРАТОРЕ ПРОДОЛЖЕНИЯ

(Представлено академиком В. И. Смирновым 14 XII 1973)

Пусть $A\subset[0,\ 1]$ — измеримое множество положительной меры, $h_1,\ldots,\ h_n$ — малые положительные числа. Рассмотрим функцию f на $\mathbf{R}$, представимую в виде суммы n периодических функций $f_1,\ldots,\ f_n$ с периодами $h_1,\ldots,\ h_n$ соответственно, и поставим вопрос: что можно сказать о f, зная ее сужение $f|A$? Методы теории функций, периодических в среднем, доставляют оператор, продолжающий $f|A$ до $f|[0,\ 1]$, если A содержит отрезок и $h=h_1+\ldots+h_n$ меньше его длины; этот оператор непрерывен в L_p, но неясно, можно ли оценить его норму величиной, зависящей только от n и A. Методы теории лакунарных рядов дают оценку, зависящую только от меры A, при выполнении двух условий [1, 2]: h_{k+1} во много раз меньше чем h_k и модуль непрерывности функции $f_k(t/h_k)$ не слишком велик; эти условия исключают «интерференцию» функций f_k.

Цель данной работы — указать оценку $f|[0,\ 1]$ через $f|A$, зависящую только от n и меры A, без предположений, ограничивающих интерференцию слагаемых. Будет указан оператор продолжения, непрерывный во многих смыслах, в том числе относительно сходимости по мере, в L_p, почти всюду.

Теорема 1. *Существуют функции B и V со следующими свойствами.*

1) *$B(n,\ a)$ положительно, возрастает по аргументу n, пробегающему натуральные числа, и убывает по a, пробегающему $(0,\ 1)$.*

2) *$V(A,\ h)$ определено и неотрицательно для всякого измеримого $A\subset[0,\ 1]$ положительной меры и всякого $h>0$; $V(A,\ h)$ убывает к нулю при $h\downarrow 0$ и фиксированном A.*

3) *Пусть $A\subset[0,\ 1]$ — измеримое множество положительной меры, $h_1,\ldots,\ h_n$ — положительные, $\theta_1,\ldots,\ \theta_n$ — комплексные числа с модулем 1. Обозначим $b=B(n, \operatorname{mes} A)$, $v=V(A, h_1+\ldots+h_n)$.*

Тогда существует измеримое $Q\subset[0,\ 1]$ такое, что $\operatorname{mes}([0,\ 1]\setminus Q)\leqslant bv$ и для любой суммы $f=f_1+\ldots+f_n$ комплексных измеримых функций на $\mathbf{R}$, удовлетворяющих условиям $f_k(t+h_k)=\theta_k f_k(t)$, выполнено неравенство

$$\|f|Q\|_p\leqslant b\cdot\|f|A\|_p \tag{*}$$

при всех $p\in[1,\ +\infty]$ ($\|\cdot\|_p$ — норма в L_p).

Замечание. Если A есть объединение интервалов, длина каждого из которых больше, чем $3h$, то $V(A,\ h)=0$.

Рассматривая пространство с мерой $(T,\ \Sigma,\ \mu)$ (иногда обозначаемое просто μ), мы всегда предполагаем, что $0<\mu T<+\infty$ и μ изоморфно mod 0 отрезку с мерой Лебега, либо набору атомов, либо отрезку с добавленными атомами. Все множества и отображения предполагаются измеримыми. Естественным образом определяется соединение $\mu_1\oplus\mu_2$ двух мер (это мера на $T_1\cup T_2$, а если они пересекаются — на объединении их непересекающихся копий); $\mu\oplus\ldots\oplus\mu$ (N раз) обозначим $N\otimes\mu$; $S(\mu)$ — профакторизованное пространство измеримых п.в. конечных функций с обычной метризуемой топологией; mes — мера Лебега на $\mathbf{R}$; сужение функции или меры на множество A обозначается $|A$.

Определение. Пусть (T_k, Σ_k, μ_k) — пространства с мерой. Стохастической молекулярной схемой (sm-схемой) из $\mu_1, \ldots, \mu_n$ в μ_0 назовем набор $\rho=(\mu, \Phi_0, \Phi_1, \ldots, \Phi_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, где (T, Σ, μ) некоторое пространство с мерой, отображения Φ_k: $T\to T_k$ таковы, что прообраз всякого множества меры 0 есть множество меры 0, Φ_0: $T\to T_0$ — сохраняющее меру отображение, $\lambda_k\in S(\mu)$. Соответствующий «sm-оператор» U_ρ определяется на замкнутом подпространстве $D_\rho\subset S(\mu_1\oplus\ldots\oplus\mu_n)$ функций f, для которых существует g из $S(\mu_0)$ такая, что

$$g(\Phi_0(t))=\lambda_1(t)f(\Phi_1(t))+\ldots+\lambda_n(t)f(\Phi_n(t))$$

почти всюду на T; при этом полагаем $U_\rho f=g$. Этим корректно определен непрерывный линейный оператор из D_ρ в $S(\mu_0)$. Назовем ρ нормированной, если всегда $\mu\Phi_k^{-1}A\leqslant\mu_kA$ и $|\lambda_k(t)|\leqslant1$; в этом случае U_ρ непрерывен в метрике L_p. Множество всех нормированных sm-схем из $\mu_1, \ldots, \mu_n$ в μ_0 обозначим $\Pi(\mu_1, \ldots, \mu_n; \mu_0)$; вместо $\Pi(\mu, \ldots, \mu$ (N раз); $\mu_0)$ будем писать $\Pi(N\times\mu; \mu_0)$.

Название «стохастический молекулярный оператор» связано с тем, что каждой точке t_0 из T_0 соответствует вероятностная «условная» мера» на $\Phi_0^{-1}\{t_0\}$ ([3]), а каждому t из $\Phi_0^{-1}\{t_0\}$ соответствует выражение для $U_\rho f(t_0)$, напоминающее интеграл от f по конечной комбинации атомарных мер.

Теорема 1 является следствием основной теоремы, отличающейся от нее тем, что неравенство (*) заменяется на следующее утверждение: существует sm-схема ρ из $\Pi(b\times(b\,\mathrm{mes}\,|A); \mathrm{mes}\,|Q)$ такая, что для всех f указанного вида $f|Q=U_\rho(b^\otimes(f|A))$. Тем самым получен оператор продолжения, обладающий многими полезными свойствами, в том числе непрерывностью по мере. Последнее позволяет свести теорему к случаю, указанному в замечании. Наметим основные моменты доказательства для этого случая.

Если $I=(i_2, \ldots, i_m)$ — набор натуральных чисел, $m\leqslant n$, то Δ_I обозначает $\Delta_2^{(i_2)}\ldots\Delta_m^{(i_m)}$, где $\Delta_k^{(i)}$ — оператор, переводящий функцию $\varphi(t)$ в $\varphi(t+ih_k)-\theta_k^i\varphi(t)$. $W(I)$ обозначает множество $\{w$: $\forall\tau_2, \ldots, \tau_m\in\{0, 1\}$ $w+\tau_2i_2h_2+\ldots+\tau_mi_mh_m\in A\}$. Для произвольного $c>1$ и I такого, что $\mathrm{mes}\,W(I)>0$, нужно построить sm-оператор, переводящий $l^\otimes(f|A)$ (с не слишком большим l) в $\Delta_If|[-c, c]$. Если длина набора I равна $n-1$, эта задача решается с помощью соотношения $\Delta_If(t+h_1)=\theta_1\Delta_If(t)$; если она будет решена для наборов длины 0, теорема будет доказана. Вся сложность в переходе от $m+1$ к m. Здесь применяются теоретико-вероятностные соображения. Все используемые случайные величины понимаются как элементы $S(P)$, где P — некоторая фиксированная вероятностная мера. Положим $4\varepsilon=\mathrm{mes}^2\,W(I)$; можно построить конечное множество E натуральных чисел такое, что $\mathrm{mes}\,W(I, i)\geqslant\varepsilon$ для $i\in E$ и $h_{m+1}|E|\geqslant\varepsilon$. Возьмем целочисленную случайную величину ξ, распределенную равномерно, на E, и независимую от нее величину z, распределенную равномерно на некотором $[-c_1, c_1]$; основной момент в индукционном переходе — построение σ из $\Pi(a\,\mathrm{mes}\,|W(I), 2N\times(a\cdot P); \mathrm{mes}\,|[-c, c])$ (с подходящими a и N) такой, что

$$\Delta_If|[-c, c]=U_\sigma((\Delta_If|W(I))\oplus(2N^\otimes(\Delta_{(I,\xi)}f(z)))). \qquad (**)$$

Возьмем независимые случайные величины $\xi_1, \ldots, \xi_{2N+1}$ (целочисленные) и $\varkappa$ так, что $\xi_2, \ldots, \xi_{2N+1}$ распределены равномерно на E, ξ_1 — на $F=\{j$: $jh_{m+1}\in W(I)\}$, $\varkappa$ — на $[0, h_1]$. Положим $\Xi_k=\xi_1-\xi_2+\ldots+(-1)^{k-1}\xi_k$. Применяя $2N$ раз формулу $\Delta_If(t+ih_{m+1})=\Delta_{(I,i)}f(t)+\theta_{m+1}^i\Delta_If(t)$, получим для $\Delta_I f(\Xi_{2N+1}h_{m+1}+\varkappa)$ выражение

$$\lambda_1\Delta_I f(\xi_1 h_{m+1}+\varkappa)+\sum_{k=2}^{2N\ 1}\lambda_k\Delta_{(I,\xi_k)}f(\Xi_{2[k/2]}h_{m+1}+\varkappa) \qquad (***)$$

где λ_k — некоторые комплексные случайные величины, не зависящие от f, $|\lambda_k|=1$. Остается выбрать σ так, чтобы (**) перешла в (***); это можно сделать, если имеется зависящая лишь от c и ε оценка снизу для плотности распределения случайной величины $\Xi_{2N+1}h_{m+1}+\varkappa$ во всех точках отрезка $[-c, c]$. Такая оценка получается из локальной предельной теоремы для решетчатых распределений, если N выбрано соответствующим образом и $h_1 \geqslant h_{m+1}$.

Автор благодарит Д. А. Владимирова за постоянное внимание к его работе.

Ленинградский государственный университет
им. А. А. Жданова

Поступило
26 VII 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *В. Ф. Гапошкин*, УМН, т. 21, № 6, 3 (1966). [2] *В. Ф. Гапошкин*, Сиб. матем. журн., т. 9, № 2, 264 (1968). [3] *В. А. Рохлин*, Матем. сборн., т. 25, № 1, 107 (1949).